

Quasi-analytische Zerlegungen

BURCHARD KAUP UND HANS-JÖRG REIFFEN

Abstract

The leaves in singular holomorphic foliation theory are examples of quasi-analytic layers. In the first part of our publication we are concerned with a theory of these subjects. A quasi-analytic decomposition of a complex manifold is a decomposition into pairwise disjoint connected quasi-analytic layers. These are holomorphic foliations in the sense of P. Stefan and K. Spallek. A very different but more usual conception of holomorphic foliations is developed by P. Baum and R. Bott. It is based on holomorphic sheaf theory. In the second part we study the relation between quasi-analytic decompositions and singular holomorphic foliations in the sense of Baum and Bott.

2000 Mathematics Subject Classification: 32C15, 32S65.

1 Einleitung

Es sei X eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie und $Z \subset X$ eine Teilmenge von X . In der Theorie der holomorphen Blätterungen sind solche Teilmengen Z von Interesse, zu denen es eine injektive holomorphe Immersion $\varphi: Y \rightarrow X$ eines komplexen Raumes Y in X mit Z als Bild gibt. Dann induziert φ auf Z eine komplexe Struktur. Wir nennen eine solche Struktur **quasi-analytisch** und Z mit dieser Struktur eine **Schichtung**. Ist Z bezüglich der Struktur zusammenhängend, so nennen wir Z eine **Schicht**. Die Blätter in einer holomorphen Blätterungstheorie sind stets Schichten.

In Abschnitt 2 geben wir eine Definition der quasi-analytischen Struktur, ohne holomorphe Abbildungen zu benutzen. Eine quasi-analytische Struktur auf Z ist eine Topologie \mathcal{T} auf Z derart, daß (Z, \mathcal{T}) lokal bezüglich \mathcal{T} jeweils eine lokal-analytische Teilmenge von X ist (vgl. Definition 2.1). Dadurch ist in natürlicher Weise auch eine komplexe Struktur auf (Z, \mathcal{T}) festgelegt. Wir stellen in Abschnitt 2 einige grundlegende Begriffe und Aussagen zusammen. Wie Beispiele in Abschnitt 3 zeigen, sind quasi-analytische Strukturen, auch wenn es sich um Schichten handelt, nicht eindeutig bestimmt. In Abschnitt 4 machen wir unter der Einschränkung einer abzählbaren Topologie (Schichten erfüllen diese Voraussetzung) eine abgeschwächte Eindeutigkeitsaussage (vgl. 4.10 und 4.11). Wie wir in Abschnitt 2 zeigen, gilt allerdings eine scharfe Eindeutigkeitsaussage für Wege-verträgliche quasi-analytische Strukturen (vgl. 2.7). Dabei heißt eine quasi-analytische Struktur **Wege-verträglich**, wenn jeder X -Weg bereits ein \mathcal{T} -Weg ist. Die Existenz einer solchen Struktur auf Z hängt allerdings von der Relativtopologie von Z bzgl. X ab (vgl. 2.5.(3)). Es handelt sich, wenn es sie gibt, um eine natürliche quasi-analytische Struktur. In Abschnitt 4 gehen wir allgemein auf natürliche quasi-analytische Strukturen ein; wir nennen sie **schwach-analytische Strukturen**. Man konstruiert sie mit Hilfe des sogenannten analytischen Inhalts. Das ist die Menge aller Teilmengen A von Z , die lokal-analytische Teilmengen von X sind. Nicht jede Teilmenge Z trägt eine schwach-analytische Struktur. Wenn eine solche existiert, ist sie eindeutig bestimmt (vgl. 4.19).

Seit Beginn der 1970er Jahre studiert man holomorphe Blätterungen mit Singularitäten. 1972 hat H. HOLMANN einen speziellen Typ von singulären holomorphen Blätterungen mit Hilfe gewisser holomorpher Abbildungen eingeführt (vgl. [H]). Er konnte dabei wie im Fall regulärer Blätterungen einen Blattbegriff einführen. Problematisch ist dies bei dem ebenfalls in 1972 von P. BAUM und R. BOTT eingeführten Begriff einer singulären holomorphen Blätterung mit Hilfe von Garben holomorpher Vektorfelder bzw. Pfaffscher Formen (vgl. [B/B] und [B]). Dieser Begriff besitzt jedoch den gewünschten Grad von Allgemeinheit.

Deshalb gehen wir von ihm in dieser Arbeit aus. In [R-1] wurde für derartige Blätterungen ein Blattbegriff eingeführt, welcher den von H. HOLMANN verallgemeinert. Allerdings besitzt nicht jede singuläre holomorphe Blätterung Blätter überall. Wir beziehen uns in dieser Arbeit bei Verweisen zur Blätterungstheorie stets auf [R-2], eine Arbeit, die über das Internet erreichbar ist.

Inspiriert durch Arbeiten von P. STEFAN hat K. SPALLEK einen Blätterungsbegriff für differenzierbare Räume eingeführt (vgl. [Spa]). Für den holomorphen Fall und komplexe Mannigfaltigkeiten als Trägerraum stimmt sein Begriff mit dem von uns in Abschnitt 5 definierten Begriff der quasi-analytischen Zerlegung überein. Eine quasi-analytische Zerlegung von X ist eine quasi-analytische Struktur auf $Z = X$; die zugehörigen Schichten nennen wir **Blätter**.

In den Abschnitten 6 bis 7 geht es um den Zusammenhang zwischen quasi-analytischen Zerlegungen und holomorphen Blätterungen.

In Abschnitt 5 stellen wir allgemeine Grundbegriffe für die Theorie der quasi-analytischen Zerlegungen zusammen und gehen vor allem auf zwei zentrale Beispiele ein: Ist Θ' eine kohärente involutive Untergarbe der Garbe Θ der holomorphen Vektorfelder auf X , so definiert Θ' , wie Spallek gezeigt hat, eine glatte quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D}' von X . Wir nennen sie die **Spallek-Zerlegung** zu Θ' ; sie ist insbesondere Wege-verträglich (vgl. 5.8 und 5.9). Ist \mathcal{F} eine holomorphe Blätterung auf X mit Blättern überall, so definieren diese eine quasi-analytische Zerlegung $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ von X ; sie ist schwach-analytisch (vgl. 5.13). Wir behandeln die Beziehung zwischen $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ und der gleichfalls existierenden Spallek-Zerlegung $\mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$ von \mathcal{F} (vgl. 5.16). In Abschnitt 6 behandeln wir quasi-analytische Zerlegungen und holomorphe Blätterungen, die abbildungsdefiniert sind, d.h. lokal durch holomorphe Abbildungen beschrieben werden können (vgl. 6.3, 6.4). Der Begriff der Regularität einer quasi-analytischen Zerlegung \mathcal{D} wird in naheliegender Weise eingeführt (vgl. 6.5) und damit der der Singularitätenmenge $\text{Sing } \mathcal{D}$. Für unsere Theorie wichtig ist der Begriff der fasertreuen holomorphen Abbildung (vgl. 6.8); insbesondere sind offene Abbildungen fasertreu. Wir erhalten das Ergebnis: die abbildungsdefinierten quasi-analytischen Zerlegungen mit fasertreuen lokalen Beschreibungen entsprechen genau den abbildungsdefinierten holomorphen Blätterungen mit fasertreuen lokalen Beschreibungen (vgl. 6.4, 6.14). Wie Beispiele am Ende von Abschnitt 6 zeigen, können quasi-analytische Zerlegungen sehr chaotisch sein, selbst wenn die zugehörige Vektorfeldgarbe kohärent ist. Deshalb erscheint es sinnvoll, bei der Definition der Kohärenz einer quasi-analytischen Zerlegung \mathcal{D} nicht nur die Kohärenz der Vektorfeldgarbe $\Theta^{\mathcal{D}}$ zu fordern, sondern darüber hinaus eine stärkere Bindung von \mathcal{D} und $\Theta^{\mathcal{D}}$ zu verlangen (vgl. 7.2). In diesem Fall definiert \mathcal{D} in natürlicher Weise eine holomorphe Blätterung $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}$ und auf $X \setminus \text{Sing } \mathcal{D}$ stimmt die von dieser dort definierte Zerlegung mit $\mathcal{D}|_{X \setminus \text{Sing } \mathcal{D}}$ überein. Die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} heißt vollständig, wenn sie kohärent ist und wenn $\Theta^{\mathcal{D}}$ vollständig ist (vgl. 7.7). Sie heißt perfekt, wenn sie kohärent ist, wenn $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$ Blätter überall besitzt und wenn $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ ist (vgl. 7.15, 7.16).

Übrigens: unser Kohärenzbegriff ist funktionentheoretisch motiviert und stimmt nicht mit dem eher geometrisch motivierten Kohärenzbegriff von SPALLEK überein.

Wir zeigen:

7.18: Die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} sei abbildungsdefiniert mit fasertreuen lokalen Beschreibungen. Dann ist \mathcal{D} vollständig und perfekt.

7.19: Die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} sei kohärent, lokal-eigentlich, rein p -dimensional und es gelte $\dim \text{Sing } \mathcal{D} < p$. Dann ist \mathcal{D} vollständig und perfekt.

7.21: Die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} sei lokal eigentlich und rein 1-codimensional. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) \mathcal{D} ist kohärent,
- (2) \mathcal{D} ist vollständig,
- (3) \mathcal{D} ist perfekt,
- (4) \mathcal{D} ist abbildungsdefiniert.

Im Fall von (4) sind die lokalen Beschreibungen übrigens sofort schon fasertreu.

In Abschnitt 8, dem Anhang, stellen wir einige Hilfsüberlegungen allgemeinerer Art zusammen.

Eine verkürzte Vorabversion dieser Arbeit wurde in [H/K/R] publiziert. Leider sind uns dort einige Fehler unterlaufen: eine Schicht ist nicht immer Wege-verträglich, und im Theorem 1.(1).(a) fehlt die Bedingung, daß \mathcal{D} lokal eigentlich ist (vgl. Beispiel 7.26 in diesem Text).

2 Quasi-analytische Schichtungen und Schichten

Es sei X stets eine n -dimensionale zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Topologie. Ist M eine beliebige Teilmenge von X , dann bezeichnen wir die Relativtopologie von M auch als die **X -Topologie**.

2.1 Definition Eine **quasi-analytische Struktur** auf einer Teilmenge Z von X ist eine Topologie \mathcal{T} auf Z , für die gilt:

Zu jedem $z \in Z$ gibt es eine offene \mathcal{T} -Umgebung A von z in Z und eine offene X -Umgebung U von z in X derart, daß A eine analytische Teilmenge von U ist und daß die \mathcal{T} -Topologie von A mit der X -Topologie von A übereinstimmt.

Wir nennen den topologischen Raum (Z, \mathcal{T}) eine **quasi-analytische Schichtung**. Wenn in der obigen Bedingung A und U zusammenhängend sind (was man durch geeignete Verkleinerungen stets erreichen kann), dann nennen wir (A, U) ein **\mathcal{T} -Plättchen**.

Die \mathcal{T} -Zusammenhangskomponenten einer quasi-analytischen Schichtung (zusammen mit der durch \mathcal{T} induzierten Topologie) nennen wir **quasi-analytische Schichten**.

Wir sprechen im Weiteren kurz von **Schichtung** bzw. **Schicht**. Jede Schicht ist wieder eine Schichtung.

Da analytische Mengen lokal wegzusammenhängend sind, ist eine Schichtung (Z, \mathcal{T}) bezüglich \mathcal{T} ebenfalls lokal wegzusammenhängend und ihre Schichten sind genau ihre \mathcal{T} -Wegzusammenhangskomponenten.

Die Topologie \mathcal{T} einer Schichtung ist feiner als die X -Topologie; lokal bzgl. \mathcal{T} trägt eine Schichtung die Relativtopologie von X .

Ist (Z, \mathcal{T}) eine Schichtung in X , dann induziert \mathcal{T} in natürlicher Weise eine komplexe Struktur auf Z : ist (A, U) ein \mathcal{T} -Plättchen, so ist A mit seiner natürlichen komplexen Struktur eine komplexe Karte von Z . Wir denken uns eine Schichtung (Z, \mathcal{T}) stets mit dieser komplexen Struktur versehen. Es ist eine reduzierte komplexe Struktur.

Wir setzen im Weiteren alle betrachteten komplexen Strukturen als reduziert voraus.

Eine holomorphe Abbildung $\varphi: Y \rightarrow Y_\bullet$ zwischen komplexen Räumen Y und Y_\bullet heißt eine **holomorphe Immersion**, wenn es zu jedem Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung U von y und eine offene Umgebung U_\bullet von $y_\bullet = \varphi(y)$ gibt derart, daß $\varphi(U)$ eine analytische Teilmenge von U_\bullet und $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ biholomorph ist.

2.2

- (1) Sei (Z, \mathcal{T}) eine Schichtung in X . Dann ist die kanonische Inklusion $\iota: Z \rightarrow X$ eine injektive holomorphe Immersion mit $\iota(Z) = Z$.
- (2) Ist umgekehrt $\varphi: Y \rightarrow X$ eine injektive holomorphe Immersion, so ist die Topologie \mathcal{T} auf $Z := \varphi(Y)$, bezüglich der φ ein Homöomorphismus ist, eine quasi-analytische Struktur auf Z , also (Z, \mathcal{T}) eine Schichtung. $\varphi: Y \rightarrow Z$ ist eine biholomorphe Abbildung.

Beweis: (1) ist klar. — (2) ergibt sich sofort aus der Definition der holomorphen Immersion. □

Eine holomorphe Abbildung wie in 2.2.(2) heißt eine **Darstellung** der Schichtung (Z, \mathcal{T}) . Wegen 2.2.(1) besitzt jede Schichtung eine Darstellung. Deshalb sind Schichtungen genau die Teilmengen von X , die Bilder komplexer Räume bezüglich injektiver holomorpher Immersionen mit Zielraum X sind.

2.3

- (1) Sei A eine lokal-analytische Teilmenge von X . Dann ist die X -Topologie von A eine quasi-analytische Struktur auf A , die sogenannte **Standardstruktur**.
- (2) Zur Schichtung (Z, \mathcal{T}) in X gebe es eine offene X -Umgebung U von Z derart, daß für jede X -kompakte Teilmenge K von U die Menge $K \cap Z$ ebenfalls \mathcal{T} -kompakt ist. Dann ist Z eine lokal-analytische Teilmenge von X und \mathcal{T} ist die Standardstruktur, also die X -Topologie.

Beweis von (2): Sei $\varphi: Y \rightarrow X$ eine Darstellung von (Z, \mathcal{T}) . Dann ist $\varphi: Y \rightarrow U$ eine eigentliche Abbildung. Aufgrund eines Satzes von Remmert (vgl. [K/K, 45.17]) ist $Z = \varphi(U)$ eine analytische Teilmenge von U , also eine lokal-analytische Teilmenge von X . Die Abbildung $\varphi: Y \rightarrow Z$ (wobei Z die X -Topologie trage) ist bijektiv, stetig und eigentlich, also ein Homöomorphismus. Also ist \mathcal{T} die X -Topologie. \square

In 2.3.(1) erfüllt A mit der Standardstruktur die Voraussetzungen von 2.3.(2). Also gibt 2.3 eine genaue Charakterisierung derjenigen Schichtungen in X an, die lokal-analytische Teilmengen von X mit ihrer Standardstruktur sind.

Die folgenden zwei Beispiele zeigen, wie vorsichtig man mit dem Begriff der Schichtung vorgehen sollte:

2.4

- (1) Sei M eine beliebige (nichtleere) Teilmenge von \mathbb{C} (z.B. $M = \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{C}$) und $Y := \bigcup_{z \in M} \{z\} \times \mathbb{C}$. Dann ist Y in natürlicher Weise eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit mit eventuell überabzählbar vielen Zusammenhangskomponenten. Die natürliche Inklusion $Y \hookrightarrow \mathbb{C}^2$ definiert eine quasi-analytische Struktur auf $Y \subset \mathbb{C}^2$.
- (2) Für eine beliebige Teilmenge $Y \subset X$ ist $\tilde{Y} := \bigcup_{y \in Y} \{y\}$ mit der diskreten Topologie auf natürlicher Weise eine null-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Die natürliche Inklusion $\tilde{Y} \hookrightarrow X$ definiert eine quasi-analytische Struktur auf Y .

Weil X nach Voraussetzung abzählbare Topologie hat und jede Schicht eine Darstellung besitzt, folgt auf Grund des Satzes von Poincar-Volterra (vgl. [Bou]), daß jede Schicht eine abzählbare Topologie besitzt. Wir nennen eine Schichtung **abzählbar**, wenn sie höchstens abzählbare viele Schichten enthält. Das ist genau dann der Fall, wenn die Schichtung abzählbare Topologie hat.

Eine lokal-analytische Teilmenge von X mit der Standardstruktur ist eine abzählbare Schichtung. Im Übrigen verweisen wir auf die Beispiele 2.4.(1).

2.5 Satz und Definition Eine Schichtung (Z, \mathcal{T}) heißt **Wege-verträglich**, wenn die folgenden äquivalenten Aussagen gelten:

- (1) Jeder X -Weg $\gamma: I = [0, 1] \rightarrow Z$ ist ein \mathcal{T} -Weg.
- (2) Für jedes \mathcal{T} -Plättchen (A, U) ist A eine X -Wegzusammenhangskomponente von $Z \cap U$.
- (3) Zu jedem $z \in Z$ gibt es ein \mathcal{T} -Plättchen (A, U) mit $z \in A$ derart, daß A die X -Wegzusammenhangskomponente von $Z \cap U$ mit $z \in A$ ist.

Beweis (1) \implies (2): Da A wegzusammenhängend ist, genügt es zu zeigen: für jeden X -Weg $\gamma: I = [0, 1] \rightarrow Z \cap U$ mit $\gamma(0) \in A$ ist $J := \{t \in I : \gamma(t) \in A\} = I$. Das ist aber klar: da A abgeschlossen ist in U , ist J abgeschlossen; da γ nach Voraussetzung auch ein \mathcal{T} -Weg ist und A \mathcal{T} -offen in $Z \cap U$, ist J offen in I .

(3) \implies (1): Sei γ wie in (1); wir zeigen, daß γ in allen $t_0 \in I$ \mathcal{T} -stetig ist. Dazu sei (A, U) ein \mathcal{T} -Plättchen mit $\gamma(t_0) \in A$ wie in (3). Weil A eine X -Zusammenhangskomponente von $Z \cap U$ ist, ist $\gamma(t) \in A$ für t nahe bei t_0 . Weil \mathcal{T} die Relativtopologie von A in U ist, ist γ auch \mathcal{T} -stetig in einer Umgebung von t_0 . \square

Wir sagen im Fall von 2.5 auch, daß \mathcal{T} **Wege-verträglich** ist.

2.6 Beispiel Ist M in 2.4.(1) total unzusammenhängend (z.B. das Cantorsche Diskontinuum), dann ist die dadurch definierte Schichtung Wege-verträglich. Für $M = \mathbb{C}$ ist das zugehörige Y nicht Wege-verträglich.

Weitere Beispiele zum Begriffe "Wege-verträglich" findet man im Abschnitt 3.

2.7 Satz Seien \mathcal{T} und \mathcal{T}_\bullet zwei Wege-verträgliche quasi-analytische Strukturen auf Z . Dann ist $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\bullet$.

Beweis: Sei $z \in Z$. Dann gibt es zu z ein \mathcal{T} -Plättchen (A, U) und ein \mathcal{T}_\bullet -Plättchen (A_\bullet, U_\bullet) gemäß (3). Wir betrachten die X -Wegzusammenhangskomponente \tilde{A} von $Z \cap U \cap U_\bullet$, die z enthält. Weil analytische Mengen lokal wegzusammenhängend sind, ist \tilde{A} eine offene Teilmenge von A und von A_\bullet . Sei \tilde{U} die X -Zusammenhangskomponente von $U \cap U_\bullet$, die z enthält, dann ist (\tilde{A}, \tilde{U}) ein \mathcal{T} - und ein \mathcal{T}_\bullet -Plättchen. \square

2.8 Sei (Z, \mathcal{T}) eine Schichtung und $V \subset Z$ eine \mathcal{T} -offene Teilmenge. Dann ist $(V, \mathcal{T}|_V)$ wieder eine Schichtung, die wir die **Einschränkung** der Schichtung (Z, \mathcal{T}) nennen.

Es sei (Z, \mathcal{T}) eine Schichtung und $W \subseteq X$, also W eine offene Teilmenge von X . Dann ist $V := Z \cap W$ eine \mathcal{T} -offene Teilmenge von Z . Die Schichten von $(V, \mathcal{T}|_V)$ nennen wir kurz die **\mathcal{T} -Komponenten** von $Z \cap W$.

2.9 Definition Die Schichtung (Z, \mathcal{T}) in X heißt **ordentlich**, wenn es zu jedem Punkt $z \in Z$ eine X -Umgebungsbasis von X -offenen Umgebungen W von z gibt mit folgender Eigenschaft:

Seien A, B zwei verschiedene \mathcal{T} -Komponenten von $Z \cap W$, so gilt $\overline{A} \cap B = \emptyset$, wobei \overline{A} der W -Abschluß von A sei.

Sind für alle W alle \mathcal{T} -Komponenten von W jeweils W -abgeschlossen, so heißt die Schichtung (Z, \mathcal{T}) **sehr ordentlich**.

In der Situation 2.9 nennen wir auch \mathcal{T} (sehr) ordentlich.

2.10 Satz Die Schichtung (Z, \mathcal{T}) in X sei abzählbar und ordentlich. Dann ist (Z, \mathcal{T}) Wege-verträglich.

Beweis: Sei $z \in Z$ und (A, U) ein \mathcal{T} -Plättchen mit $z \in A$. Sei $W \subset U$ eine offene X -Umgebung aus der in 2.9 genannten Umgebungsbasis. Wir betrachten die \mathcal{T} Zusammenhangskomponente A_0 von $A \cap W$, die z enthält. $Z \cap W$ besitzt höchstens abzählbar viele \mathcal{T} -Komponenten B_ν , $\nu \in N \subset \mathbb{N}$. Es ist $\overline{B}_\nu \cap B_\mu = \emptyset$ für $\nu \neq \mu$. Sei $0 \in N$ und $z \in B_0$. Dann ist $A_0 = B_0$. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow Z \cap W$ ein X -Weg mit $\gamma(0) = z$. Für jedes $\nu \in N$ ist $\gamma^{-1}(B_\nu) = \gamma^{-1}(\overline{B}_\nu)$ eine abgeschlossene Teilmenge von I . Wegen Satz 8.2 ist $\gamma^{-1}(B_0) = I$, also $\gamma(I) \subset A_0$. Deshalb ist A_0 die X -Wegzusammenhangskomponente von $Z \cap W$, die z enthält. Nun kann mit A_0 die Situation von 2.5.(3) hergestellt werden. \square

Ist im Beispiel 2.4.(1) die Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ abzählbar, dann ist Y eine abzählbare sehr ordentliche Schichtung, insbesondere also, wie in 2.6 schon festgestellt, Wege-verträglich.

Die Standardstruktur einer lokal-analytischen Teilmenge A von X ist sehr ordentlich, insbesondere Wege-verträglich.

Der folgende Satz gibt ein einfaches Konstruktionsverfahren für quasi-analytische Strukturen auf Teilmengen Z von X an.

2.11 Satz und Definition Sei Z eine Teilmenge von X und \mathcal{A} ein System lokal-analytischer Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $Z = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$
- (2) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ ist $A \cap B$ sowohl A - als auch B -offen (dabei ist $A \cap B = \emptyset$ zugelassen)

Dann ist

$$\mathcal{B} := \{A' : A' \text{ ist } A\text{-offene Teilmenge eines } A \in \mathcal{A}\}$$

Basis einer quasi-analytischen Struktur \mathcal{T} auf Z . \mathcal{A} heißt ein **Erzeugendensystem** von \mathcal{T} und wir bezeichnen mit $\text{Top}(\mathcal{A}) := \mathcal{T}$ die durch \mathcal{A} erzeugte Topologie.

Beweis: Man beachte: sind $A, B \in \mathcal{A}$ und ist $C \subset A \cap B$, so gilt:

$$C \text{ ist } A\text{-offen} \iff C \text{ ist } A \cap B\text{-offen} \iff C \text{ ist } B\text{-offen}$$

Daraus folgt, daß $A' \cap B' \in \mathcal{B}$ für alle $A', B' \in \mathcal{B}$. Also ist \mathcal{B} Basis einer Topologie \mathcal{T} auf Z . Offensichtlich ist \mathcal{T} eine quasi-analytische Struktur. \square

2.12 Satz Die Teilmenge Z von X besitze folgende Eigenschaft:

Zu jedem $z \in Z$ gibt es eine offene X -Umgebung U von z derart, daß die X -Wegzusammenhangskomponente A von $Z \cap U$, die z enthält, eine analytische Teilmenge von U ist.

Dann erfüllt das System \mathcal{A} aller dieser lokal-analytischen Teilmengen A von X die Voraussetzungen von 2.11 und $\mathcal{T} = \text{Top}(\mathcal{A})$ ist eine Wege-verträgliche quasi-analytische Struktur auf Z .

Beweis: Daß \mathcal{A} die Bedingung 2.11.(1) erfüllt, folgt aus dem lokalen Wegzusammenhang lokal-analytischer Mengen. Wegen 2.5.(3) ist \mathcal{T} Wege-verträglich. \square

Wegen 2.7 ist das System \mathcal{A} aus 2.12 ein Erzeugendensystem für jede Wege-verträgliche quasi-analytische Struktur auf Z .

Bezeichne \mathcal{T} die quasi-analytische Struktur auf Y in 2.4.(1). Dann ist $\mathcal{A} = \{\{z\} \times \mathbb{C} : z \in M\}$ ein Erzeugendensystem von \mathcal{T} .

Mit Θ bezeichnen wir die Garbe der holomorphen Vektorfelder auf X . Für ein Vektorfeld ϑ auf $W \subseteq X$ und $z \in W$ bezeichnen wir mit $\vartheta|_z$ den durch ϑ im Tangentialraum $T(X, z)$ definierten Tangentialvektor.

2.13 Definition und Bemerkung Sei (Z, \mathcal{T}) eine Schichtung in X und $z \in Z$. Dann ist für den komplexen Raum (Z, \mathcal{T}) der **Tangentialraum** $T((Z, \mathcal{T}), z) \subset T(X, z)$ in z wohldefiniert.

Ist in der Situation von 2.13 (A, U) ein \mathcal{T} -Plättchen mit $z \in A$, so ist $T((Z, \mathcal{T}), z) = T(A, z)$ (zur Erinnerung an die Definition von $T(A, z)$ vgl. den Beweis von 2.15).

2.14 Definition Sei (Z, \mathcal{T}) eine Schichtung in X und $W \subseteq X$. Ein Vektorfeld $\vartheta \in \Theta(W)$ heißt **tangentiell** oder **parallel zu (Z, \mathcal{T})** , wenn gilt:

$$\vartheta|_z \in T((Z, \mathcal{T}), z) \quad \forall z \in W.$$

Wir schreiben dann $\vartheta \parallel (Z, \mathcal{T})$.

Wenn bei einer Betrachtung einer Schichtung (Z, \mathcal{T}) die Hervorhebung der quasi-analytischen Struktur nicht notwendig erscheint, lassen wir im Folgenden häufig die Angabe von \mathcal{T} fort, sprechen also von der Schichtung Z und notieren $T(Z, z)$, $\vartheta \parallel Z$ und benutzen ähnliche Redeweisen bzw. Notationen.

2.15 Satz Sei Z eine Schichtung in X , $W \subseteq X$ und $\vartheta \in \Theta(W)$. Wenn es eine bezüglich der Z -Topologie dichte Teilmenge $M \subset Z \cap W$ gibt derart, daß $\vartheta|_z \in T(Z, z)$ für alle $z \in M$, dann ist ϑ parallel zu Z .

Beweis: Es sei $z \in Z \cap W$ und (A, U) ein Plättchen von Z mit $z \in A$. Wir dürfen annehmen, daß $U \subset W$ und daß es Funktionen $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}(U)$ gibt, welche die Idealgarbe von A überall in U erzeugen. Dann ist der lineare Faserraum

$$T(A) := \{(z, \eta) \in U \times \mathbb{C}^n : f_\mu(z) = 0, d_z f_\mu(\eta|_z) = 0, \mu = 1, \dots, m\}$$

der Faserraum der Tangentialräume an A . Nun ist die Behauptung offensichtlich. \square

2.16 Bezeichnung Es sei Z eine Schichtung in X . Dann notieren wir die \mathcal{O}_X -Garbe der zu Z tangentialen Vektorfelder mit Θ^Z .

Die Garbe Θ^Z ist involutiv:

2.17 Satz Es sei Z eine Schichtung in X , $W \subseteq X$ und $\vartheta, \eta \in \Theta^Z(W)$. Dann ist auch $[\vartheta, \eta] \in \Theta^Z(W)$.

Beweis: Wir gehen von der Situation im Beweis von 2.15 aus und sehen Vektorfelder als Derivationen an. Mit \mathcal{I} notieren wir die Idealgarbe von A in U . Dann gilt $\eta(f_\mu) \in \mathcal{I}(U)$, $\vartheta(f_\mu) \in \mathcal{I}(U)$ für jedes f_μ , also $[\vartheta, \eta](f_\mu) = \vartheta(\eta(f_\mu)) - \eta(\vartheta(f_\mu)) \in \mathcal{I}(U)$. \square

In Definition 2.1 haben wir definiert, was wir unter einer quasi-analytischen Struktur auf einer Teilmenge Z der Mannigfaltigkeit X verstehen wollen. In der folgenden Definition verallgemeinern wir diese Definition in kanonischer Weise für Teilmengen beliebiger komplexer Räume:

2.18 Definition Sei Y ein komplexer Raum. Eine **quasi-analytische Struktur** auf einer Teilmenge Z von Y ist eine Topologie \mathcal{T} auf Z , für die gilt:

Zu jedem $z \in Z$ gibt es eine offene \mathcal{T} -Umgebung A von z in Z und eine offene Y -Umgebung U von z in Y , derart daß A eine analytische Teilmenge von U ist und daß die \mathcal{T} -Topologie (vgl. 2.1) von A mit der Y -Topologie von A übereinstimmt.

Wir benutzen in der Situation von 2.18 Bezeichnungen analog zu 2.1.

Im Weiteren benutzen wir die Begriffsbildung 2.18 an einigen Stellen in der speziellen Situation, daß der komplexe Raum Y eine Schichtung (Z, \mathcal{T}) von X ist.

2.19 Definition Seien $(Z_\bullet, \mathcal{T}_\bullet)$ und (Z, \mathcal{T}) quasi-analytische Schichtungen von X . Dann heißt $(Z_\bullet, \mathcal{T}_\bullet)$ eine **quasi-analytische Teilmenge** von (Z, \mathcal{T}) , wenn gilt:

- (1) $Z_\bullet \subset Z$,
- (2) $(Z_\bullet, \mathcal{T}_\bullet)$ ist eine quasi-analytische Schichtung von (Z, \mathcal{T}) .

2.20 Satz Seien $(Z_\bullet, \mathcal{T}_\bullet)$ und (Z, \mathcal{T}) quasi-analytische Schichtungen von X . Dann gilt: $(Z_\bullet, \mathcal{T}_\bullet)$ ist genau dann eine quasi-analytische Teilmenge von (Z, \mathcal{T}) , wenn es zu jedem $z \in Z_\bullet$ ein \mathcal{T}_\bullet -Plättchen A_\bullet und ein \mathcal{T} -Plättchen A gibt mit $z \in A_\bullet \subset A$.

Der **Beweis** ist klar.

Ist in der Situation von 2.19 Z'_\bullet eine Schicht von Z_\bullet , so ist Z'_\bullet \mathcal{T} -zusammenhängend, also in einer Schicht Z' von Z enthalten, genauer: quasi-analytische Teilmenge einer Schicht Z' von Z .

3 Beispiele

Vorweg zwei Aussagen, welche Begründungen bei der Diskussion einiger der nachfolgenden Beispiele liefern.

Die Standardstruktur einer lokal-analytischen Teilmenge ist Wege-verträglich, deshalb folgt mit 2.7:

3.1 Sei A eine lokal-analytische Teilmenge in X . Ist \mathcal{T} eine quasi-analytische Struktur auf A , die von der Standardstruktur verschieden ist, so ist \mathcal{T} nicht Wege-verträglich.

3.2 Satz Die Teilmenge Z von X sei lokal X -wegzusammenhängend. Gibt es auf Z eine Wege-verträgliche quasi-analytische Struktur \mathcal{T} , so ist Z eine lokal-analytische Teilmenge von X und \mathcal{T} ist die Standardstruktur.

Beweis: Sei $z \in Z$ und (A, U) ein \mathcal{T} -Plättchen zu z gemäß 2.5.(3). Es existiert eine X -Umgebung $W \subset U$ derart, daß $Z \cap W$ X -zusammenhängend ist. Es folgt: $A \cap W = Z \cap W$, Z ist in z analytisch. \square

Ist die Teilmenge Z in X also lokal X -zusammenhängend und nicht lokal-analytisch, so kann sie keine Wege-verträgliche quasi-analytische Struktur besitzen.

In den folgenden Beispielen gewinnen wir die quasi-analytischen Strukturen mit Hilfe von 2.11.

3.3 Beispiel Sei $X = Z = \mathbb{C}$, $\mathcal{A} := \{\{0\}, \mathbb{C}^*\}$. Dann ist $\mathcal{T} := \text{Top}(\mathcal{A})$ eine von der Standardstruktur auf \mathbb{C} verschiedene Struktur. \mathcal{T} ist nicht Wege-verträglich.

3.4 Sei $X := \mathbb{C}^2$ und

$$Z = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z \cdot w = 0\} = (\mathbb{C} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{C}).$$

Dann ist

$$\mathcal{T} := \text{Top}(\mathbb{C} \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{C}^*)$$

eine von der Standardstruktur auf der analytischen Menge Z verschiedene Struktur, insbesondere nicht Wege-verträglich. (Z, \mathcal{T}) besteht aus zwei Schichten und ist eine Mannigfaltigkeit.

3.5 Beispiel Es sei $X := \mathbb{C}^2$ und

$$Z_0 := (\mathbb{C} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{w \in \mathbb{C} : |w - 1| > 1\}).$$

Z_0 ist in $(0, 0)$ nicht analytisch, aber lokal X -wegzusammenhängend. Deshalb kann Z_0 keine Wege-verträgliche quasi-analytische Struktur tragen. Insbesondere ist die quasi-analytische Struktur

$$\mathcal{T}_0 := \text{Top}(\mathbb{C} \times \{0\}, \{0\} \times \{w \in \mathbb{C} : |w - 1| > 1\})$$

nicht Wege-verträglich. (Z_0, \mathcal{T}_0) besteht aus zwei Schichten und ist eine Mannigfaltigkeit.

Die Konstruktionsideen bei 3.4 und 3.5 kann man benutzen, um auch exotische zusammenhängende Schichtungen zu bekommen.

Im Folgenden bezeichnen wir \mathbb{C} mit \mathbb{C}_z , wenn wir andeuten wollen, daß wir die Elemente von \mathbb{C} mit z bezeichnen; analog wird $\mathbb{C}_{z,w}$ definiert.

3.6 Beispiel Sei $X := \mathbb{P}^2$. Dann ist $Z := \{[z, w, t] \in \mathbb{P}^2 : z \cdot w \cdot t = 0\}$ eine komplexe Kurve im \mathbb{P}^2 mit den irreduziblen Komponenten

$$\mathbb{P}_1^1 := \{[z, w, t] \in \mathbb{P}^2 : z = 0\}, \quad \mathbb{P}_2^1 := \{[z, w, t] \in \mathbb{P}^2 : w = 0\}, \quad \mathbb{P}_3^1 := \{[z, w, t] \in \mathbb{P}^2 : t = 0\}.$$

Z ist zusammenhängend, da

$$[0, 0, 1] \in \mathbb{P}_1^1 \cap \mathbb{P}_2^1, \quad [0, 1, 0] \in \mathbb{P}_1^1 \cap \mathbb{P}_3^1, \quad [1, 0, 0] \in \mathbb{P}_2^1 \cap \mathbb{P}_3^1.$$

Wir interpretieren wie üblich $\mathbb{C}_{z,w}^2$ als Teilmenge von \mathbb{P}^2 :

$$\mathbb{C}_{z,w}^2 = \{[z, w, t] \in \mathbb{P}^2 : t = 1\}.$$

Damit ist $Z' := Z \cap \mathbb{C}_{z,w}^2$ die in Beispiel 3.4 angegebene analytische Menge.

Sei

$$W := \mathbb{P}^2 \setminus \{(z, w) \in \mathbb{C}_{z,w}^2 : |z|^2 + |w|^2 \leq 1\}.$$

Dann ist

$$\mathcal{T} := \text{Top}(\mathbb{C}_z \times \{0\}, \{0\} \times \mathbb{C}_w^*, Z \cap W)$$

eine von der Standardstruktur auf Z verschiedene Struktur, insbesondere nicht Wege-verträglich. (Z, \mathcal{T}) besteht aus einer Schicht.

Wir variieren nun die Menge Z' wie in 3.5. Sei

$$Z'_0 := (\mathbb{C}_z \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{w \in \mathbb{C}_w : |w - 1| > 1\}).$$

Wir ersetzen die Menge Z' in Z durch die Menge Z'_0 und erhalten so die Menge Z_0 . Sie ist in $(0,0)$ nicht analytisch, aber lokal X -wegzusammenhängend. Deshalb kann Z_0 keine Wege-verträgliche quasi-analytische Struktur tragen. Insbesondere ist die quasi-analytische Struktur

$$\mathcal{T}_0 := \text{Top}(\mathbb{C}_z \times \{0\}, \{0\} \times \{w \in \mathbb{C}_w : |w-1| > 1\}, Z \cap W)$$

auf Z_0 nicht Wege-verträglich. (Z_0, \mathcal{T}_0) besteht aus einer Schicht.

3.7 Beispiel (Kurve von Lissajous) Es sei $X := \mathbb{C}^2$ und

$$Z := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : 4z^4 - 4z^2 + w^2 = 0\}$$

Dann gilt:

- (1) $\text{Sing } Z = \{(0,0)\}$
- (2) für $W := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < 1\}$ ist $Z' := Z \cap W = Z_+ \cup Z_-$, wobei

$$Z_{\pm} := \{(z, \pm 2iz\sqrt{z^2-1}) : z \in \mathbb{C}, |z| < 1\};$$

Z_+ und Z_- sind Untermannigfaltigkeiten von W , die sich in $(0,0)$ schneiden.

- (3) für $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $g(t) := (\cos t, \sin 2t)$ ist $g(\mathbb{C}) = Z$
- (4) $Z \setminus \{(0,0)\}$ ist zusammenhängend.

Beweis:

(1): Sei $f := 4z^4 - 4z^2 + w^2 = 4z^2(z^2 - 1) + w^2$. Es ist $df = (16z^3 - 8z)dz + 2w dw$, also

$$\begin{aligned} df|_{(z,w)} = 0 &\iff 8z(2z^2 - 1) = 0 \text{ und } w = 0 \\ &\iff (z = 0, w = 0) \text{ oder } (z^2 = 1/2, w = 0). \end{aligned}$$

Für $z^2 = 1/2, w = 0$ ist $f(z, w) = -1 \neq 0$. Also ist $\text{Sing } Z \subset \{(0,0)\}$.

(1) und (2): Sei $(z, w) \in W$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (z, w) \in Z &\iff 4z^2(z^2 - 1) + w^2 = 0 \\ &\iff (2z\sqrt{z^2-1} + iw)(2z\sqrt{z^2-1} - iw) = 0 \\ &\iff w = 2iz\sqrt{z^2-1} \text{ oder } w = -2iz\sqrt{z^2-1} \\ &\iff (z, w) \in Z_+ \cup Z_-. \end{aligned}$$

(3): Sei $t \in \mathbb{C}$ und $(z, w) = g(t)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 4z^2(z^2 - 1) + w^2 &= 4(\cos^2 t)(\cos^2 t - 1) + \sin^2 2t \\ &= -4\cos^2 t \cdot \sin^2 t + 4\cos^2 t \cdot \sin^2 t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Folglich ist $g(\mathbb{C}) \subset Z$.

Es sei $(z, w) \in Z$. Da $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ surjektiv ist (vgl. 8.7), existiert ein $t \in \mathbb{C}$ mit $z = \cos t$. Dann folgt:

$$w^2 = 4z^2(1 - z^2) = 4\cos^2 t \sin^2 t = (\sin 2t)^2,$$

also $w = \sin 2t$ oder $w = -\sin 2t$, also $(z, w) = g(t)$ oder $(z, w) = g(-t)$.

(4): Sei $\mathbb{Z}' := \{k \in \mathbb{Z} : k \text{ ist ungerade}\}$. Dann gilt: $g(t) = (0,0) \iff t = k\pi/2, k \in \mathbb{Z}'$. Also ist $Z \setminus \{(0,0)\} = g(\mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}' \cdot \pi/2))$.

3.8 Fortsetzung von 3.7 Z ist eine analytische Menge mit einer Singularität in $(0,0)$. Dann ist

$$\mathcal{T} := \text{Top}(Z \setminus \{(0,0)\}, Z_+, Z_- \setminus \{(0,0)\})$$

eine von der Standardstruktur verschiedene quasi-analytische Struktur auf Z , insbesondere nicht Wege-verträglich. (Z, \mathcal{T}) ist eine Schicht und zwar eine Riemannsche Fläche.

Wir variieren nun die Menge Z analog wie in 3.5. Sei

$$Z'_0 := Z_+ \cup \left(Z_- \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z - 1/3| > 1/3\} \right).$$

Wir ersetzen die Menge Z' in Z durch die Menge Z'_0 und erhalten so die Menge Z_0 . Sie ist in $(0, 0)$ nicht analytisch, aber lokal X -wegzusammenhängend, kann also keine Wege-verträgliche quasi-analytische Struktur tragen. Insbesondere ist die quasi-analytische Struktur

$$\mathcal{T}_0 := \text{Top}(Z \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z - 1/3| > 1/3\}, Z_+, Z_- \cap \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z - 1/3| > 1/3\})$$

auf Z_0 nicht Wege-verträglich. (Z_0, \mathcal{T}_0) ist eine Schicht und zwar eine Riemannsche Fläche.

Im folgenden Beispiel benutzen wir 2.2.(2) zur Konstruktion einer quasi-analytischen Struktur.

3.9 Beispiel Wir betrachten den eindimensionalen Torus $T := \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ sowie den zweidimensionalen Torus $X := \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4 = T \times T$. Die natürliche Projektion $p: \mathbb{C}^2 \rightarrow X$ ist lokal biholomorph. Sei $a \in \mathbb{R}$ irrational und $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow X$, $\varphi(z) := p(z, az)$. Offensichtlich ist φ eine holomorphe Immersion. φ ist auch injektiv:

$$\begin{aligned} \varphi(z) = \varphi(w) &\iff p(z, az) = p(w, aw) \\ &\iff z - w =: k \in \mathbb{Z}^2, ak \in \mathbb{Z}^2 \\ &\iff k = 0 \\ &\iff z = w. \end{aligned}$$

Sei \mathcal{T} die durch φ gemäß 2.2.(2) definierte quasi-analytische Struktur auf $Z = \varphi(\mathbb{C})$. Dann ist (Z, \mathcal{T}) eine Schicht.

Z ist dicht in X (bei der folgenden Argumentation gehen wir reell vor und notieren für komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ die reellen Komponenten mit z_1, z_2): Sei $(u, v) \in \mathbb{C}^2$, $\varepsilon > 0$. Wegen 8.5 gibt es ein $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}$ und Zahlen $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ mit:

$$\begin{aligned} z_1 &= u_1 + k_1, & |az_1 - (v_1 + l_1)| &< \varepsilon; \\ z_2 &= u_2 + k_2, & |az_2 - (v_2 + l_2)| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Man schließt wie in 8.6: Z ist dicht in X .

Die quasi-analytische Struktur ist sehr ordentlich, insbesondere Wege-verträglich:

Sei $(\eta, \xi) \in T \times T$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon < 1/2$. Wir betrachten einen Punkt $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ mit $p(u, v) = (\eta, \xi)$. Sei (wieder in reeller Notation)

$$Q_\varepsilon :=]u_1 - \varepsilon, u_1 + \varepsilon[\times]u_2 - \varepsilon, u_2 + \varepsilon[\times]v_1 - \varepsilon, v_1 + \varepsilon[\times]v_2 - \varepsilon, v_2 + \varepsilon[\subset \mathbb{C}^2$$

und $W_\varepsilon := p(Q_\varepsilon) \subset X$. Die Abbildung $p: Q_\varepsilon \rightarrow W_\varepsilon$ ist biholomorph und

$$p^{-1}(W_\varepsilon) = \bigcup_{k, l \in \mathbb{Z}^2} (Q_\varepsilon + (k, l))$$

(dabei sind die Mengen in der Vereinigung paarweise disjunkt).

Sei $G := \{(z, az) : z \in \mathbb{C}\}$. Für alle $k, l \in \mathbb{Z}^2$ ist $G_{\varepsilon, k, l} := G \cap (Q_\varepsilon + (k, l))$ eine $(Q_\varepsilon + (k, l))$ -abgeschlossene und konvexe Teilmenge von $Q_\varepsilon + (k, l)$. Sei

$$A_{\varepsilon, k, l} := p(G_{\varepsilon, k, l}).$$

Weil φ injektiv ist, sind die $A_{\varepsilon, k, l}$ paarweise disjunkt. Sie bilden die \mathcal{T} -Komponenten von $Z \cap W_\varepsilon$. Jedes $A_{\varepsilon, k, l}$ ist W_ε -abgeschlossen.

4 Analytischer Inhalt

In diesem Abschnitt wollen wir für eine Teilmenge von X die Nähe zur Analytizität beschreiben und für geeignete Teilmengen eine natürliche quasi-analytische Struktur einführen.

Im Weiteren sei Z eine Teilmenge von X .

4.1 Definition Die Menge $\mathcal{I}(Z)$ aller lokal-analytischen Teilmengen A von X mit $A \subset Z$ nennen wir den **analytischen Inhalt** von Z . Ferner nennen wir

$$\dim Z := \max\{\dim A : A \in \mathcal{I}(Z)\}$$

die **analytische Dimension** von Z .

4.2 Sei A eine lokal-analytische Teilmenge von X . Dann stimmen für A die analytische Dimension und die übliche (komplexe) Dimension überein.

4.3 Sei \mathcal{T} eine quasi-analytische Struktur auf Z . Dann gilt:

- (1) Ist (A, U) ein \mathcal{T} -Plättchen, so ist $A \in \mathcal{I}(Z)$.
- (2) $\dim(Z, \mathcal{T}) \leq \dim Z$.

4.4 Satz Sei \mathcal{T} eine abzählbare quasi-analytische Struktur auf Z . Dann ist $\dim(Z, \mathcal{T}) = \dim Z$.

Beweis: Wir führen die Annahme $p := \dim(Z, \mathcal{T}) < q := \dim Z$ zum Widerspruch.

Es existiert eine zusammenhängende q -dimensionale Untermannigfaltigkeit B von X mit $B \subset Z$. Weil (Z, \mathcal{T}) ein Lindelöf-Raum ist, gibt es eine abzählbare System \mathcal{A} von \mathcal{T} -Plättchen (A, U) mit $Z \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Für jedes $A \in \mathcal{A}$ ist $B \cap A$ eine niederdimensionale lokal-analytische Teilmenge von B , also bzgl. B eine Lebesguesche Nullmenge. Weil \mathcal{A} abzählbar ist, muß B bzgl. B eine Lebesguesche Nullmenge sein. Widerspruch! \square

Daß die Forderung der Abzählbarkeit in 4.4 wesentlich ist, zeigen die Beispiele 2.4. Genauer gilt: es bezeichne \mathcal{T} jeweils die dort angegebene quasi-analytische Struktur. Dann gilt:

4.5 Ist $M = \mathbb{C}$ in 2.4.(1), so ist $\dim(\mathbb{C}^2, \mathcal{T}) = 1$ und $\dim \mathbb{C}^2 = 2$. — Ist $Y = X$ in 2.4.(2), so ist $\dim(X, \mathcal{T}) = 0$ und $\dim X = n$.

Für die Extremfälle $\dim Z = n$ bzw. $\dim Z = 0$ der analytischen Dimension gilt:

4.6

- (1) $\dim Z = n \iff Z$ besitzt X -innere Punkte.
- (2) $\dim Z = 0 \iff$ die diskrete Topologie ist die einzige quasi-analytische Struktur auf Z .

4.7 Beispiel Sei $X := \mathbb{C}^2$ und $Z := \{(u, v) : u, v \in \mathbb{R}\}$. Weil die reell 2-dimensionale reell-analytische Fläche Z keine lokal-analytische Menge der (komplexen) Dimension 1 enthält, gilt $\dim Z = 0$.

4.8 Sei \mathcal{T} eine quasi-analytische Struktur auf Z .

- (1) Ist $\dim(Z, \mathcal{T}) = n$, so enthält Z X -innere Punkte.
- (2) Ist \mathcal{T} abzählbar und enthält Z X -innere Punkte, so ist $\dim(Z, \mathcal{T}) = n$.

Beweis: Ad (1): Sei (A, U) ein \mathcal{T} -Plättchen von Z der Dimension n . Dann besitzt A X -innere Punkte.
 Ad (2): Wegen 4.4 ist $\dim(Z, \mathcal{T}) = \dim Z$. \square

Aus 4.4 folgt ferner:

4.9 Seien $\mathcal{T}, \mathcal{T}_\bullet$ abzählbare quasi-analytische Strukturen auf Z . Dann ist $\dim(Z, \mathcal{T}) = \dim(Z, \mathcal{T}_\bullet)$.

Wir nehmen jetzt an, daß die Situation von 4.9 vorliegt. Dann sei \tilde{Z} die Menge aller $z \in Z$ mit folgender Eigenschaft:

Es existiert eine offene \mathcal{T} -Umgebung V von z , die auch \mathcal{T}_\bullet -offen ist, und für die $\mathcal{T}|_V = \mathcal{T}_\bullet|_V$ gilt.

Diese Forderung ist äquivalent zur folgenden Forderung:

Es existiert ein \mathcal{T} -Plättchen (A, U) mit $z \in A$, welches gleichzeitig ein \mathcal{T}_\bullet -Plättchen ist.

4.10 Die Menge \tilde{Z} ist \mathcal{T} -offen und \mathcal{T}_\bullet -offen sowie X -dicht in Z .

Beweis: Die Offenheitsaussage ist klar. Zum Nachweis der Dichtheit sei $z \in Z$, W eine beliebige X -offene Umgebung von z und $q := \dim(Z \cap W)$. Wir betrachten ein \mathcal{T} -Plättchen (A, U) mit $U \subset W$. Es sei B eine Zusammenhangskomponente von $A \setminus \text{Sing } A$ der Dimension q . Mit dem Argument aus dem Beweis von 4.4 gibt es ein \mathcal{T}_\bullet -Plättchen (A_\bullet, U_\bullet) und ein $z' \in B \cap A_\bullet$ mit $B_{z'} \subset (A_\bullet)_{z'}$. Dann muß $\dim A_{\bullet, z'} = q$ und $B_{z'}$ eine irreduzible Komponente von $(A_\bullet)_{z'}$ sein. Indem wir gegebenenfalls z' gegen einen Nachbarpunkt aus B austauschen, dürfen wir $B_{z'} = (A_\bullet)_{z'}$ und dann sofort A_\bullet als B -offene Teilmenge von B annehmen. Also ist $z' \in \tilde{Z}$. \square

Eine einfache Modifikation des Beweises von 4.10 liefert

4.11 Satz Sei $p = \dim Z$ und Z_p die Vereinigung der irreduziblen Komponenten von (Z, \mathcal{T}) der Dimension p . Dann ist $\tilde{Z} \cap Z_p$ \mathcal{T} -dicht in Z_p .

Wie unsere Beispiele 3.3, 3.4, 3.6 und 3.8 zeigen, ist unser Ergebnis 4.10 bzw. 4.11 die bestmögliche Eindeutigkeitsaussage für abzählbare quasi-analytische Strukturen.

Im Folgenden wollen wir mit Hilfe von $\mathcal{I}(Z)$ und Satz 2.11 für geeignete Mengen Z eine natürliche quasi-analytische Struktur auf Z konstruieren. Um 2.11.(2) zu erfüllen, müssen wir eine Maximalitätsforderung stellen. Dazu müssen wir gewisse Teilmengen von $\mathcal{I}(Z)$ betrachten. Zunächst einige Bezeichnungen:

4.12 Bezeichnung Sei Y ein komplexer Raum. Dann bezeichne

$$\underline{\dim} Y := \min\{\dim_y Y : y \in Y\}$$

die **Minimaldimension** von Y .

4.13 Bezeichnung Für $p \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\mathcal{I}_p(Z) := \{A \in \mathcal{I}(Z) : \underline{\dim} A \geq p\}.$$

Natürlich ist $\mathcal{I}_p(Z) = \emptyset$ für $p > \dim Z$.

Nun zur zentralen Definition (dabei bezeichnen wir, wie bisher schon, mit A_z den von A in z definierten Mengenkeim):

4.14 Definition Für $p \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_p(Z) := \{A \in \mathcal{I}_p(Z) : \text{für alle } B \in \mathcal{I}_p(Z) \text{ gilt: } [B_z \subset A_z \ \forall z \in B \cap A]\}$$

Ist $A \in \mathcal{A}_p$ zusammenhängend (was man durch geeignete Verkleinerung stets erreichen kann), so heißt A eine **p -dicke Z -Scheibe**

4.15 Beispiel Sei Z eine lokal-analytische Teilmenge von X und $p := \underline{\dim} Z$. Dann gilt:

$$\mathcal{A}_0(Z) = \mathcal{A}_1(Z) = \dots = \mathcal{A}_p(Z) = \{A : A \text{ ist } Z\text{-offene Teilmenge von } Z\}$$

Ist in 4.14 auch $B \in \mathcal{A}_p$, so gilt für alle $z \in A \cap B$, dass $B_z = A_z$. Daraus folgt:

4.16 Definition und Satz Z heißt eine **p -dicke schwach-analytische Teilmenge** von X , wenn $Z = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_p} A$. — In diesem Fall erfüllt \mathcal{A}_p die Voraussetzungen von 2.11, definiert also eine quasi-analytische Struktur \mathcal{T}_p auf Z , die **p -Standardstruktur**.

4.17 Sei Z eine lokal-analytische Teilmenge von X und $p := \underline{\dim} Z$. Für jedes $q \leq p$ ist dann Z eine q -dicke schwach-analytische Teilmenge von X und \mathcal{T}_q ist die übliche Standardtopologie.

Zum **Beweis** siehe 4.15.

4.18 Satz Sei \mathcal{T} eine Wege-verträgliche quasi-analytische Struktur auf Z . Dann ist Z eine 0-dicke schwach-analytische Teilmenge von X und $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$.

Beweis: Bezeichne \mathcal{A} das in 2.12 genannte Erzeugendensystem von \mathcal{T} . Weil lokal-analytische Mengen lokal X -wegzusammenhängend sind, folgert man sofort dass $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0(Z)$. \square

Wie Beispiel 4.15 zeigt, ist die Zahl p bei einer p -dicken schwach-analytischen Teilmenge Z von X nicht eindeutig bestimmt. Allerdings gilt:

4.19 Satz Sei Z eine zugleich p -dicke und q -dicke schwach-analytische Teilmenge von X . Dann ist $\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_q$ und folglich $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_q$.

Zum Beweis von 4.19 zeigen wir zunächst:

4.20 Sei Z eine p -dicke schwach-analytische Teilmenge von X und $q \leq p$. Dann ist $\mathcal{A}_q \subset \mathcal{A}_p$.

Beweis: Sei $B \in \mathcal{A}_q$. Wir müssen zeigen: $\underline{\dim} B \geq p$. Wir nehmen an: $\dim B < p$. Dann gibt es einen regulären Punkt x von B mit $\dim_x B < p$. Sei $A \in \mathcal{A}_p$ mit $x \in A$. Dann ist $A_x \subset B_x$, insbesondere $\dim_x B \geq p$. Widerspruch!

Beweis von 4.19: Wir dürfen annehmen dass $q \leq p$. Wegen 4.20 ist $\mathcal{A}_q \subset \mathcal{A}_p$. Sei $A \in \mathcal{A}_p$ und $x \in A$. Es existiert ein $B \in \mathcal{A}_q$ mit $x \in B$. Weil auch $B \in \mathcal{A}_p$ gilt, ist $B_z = A_z$, und es existiert eine offene X -Umgebung U von z mit $A \cap U = B \cap U$. Aus dieser Überlegung folgert man daß für alle $C \in \mathcal{I}_q$ gelten muß: $C_z \subset A_z \forall z \in C \cap A$. Also ist $A \in \mathcal{A}_q$. \square

4.21 Definition Z heißt eine **schwach-analytische Teilmenge** von X , wenn es ein $p \in \mathbb{N}_0$ gibt derart, daß Z eine p -dicke schwach-analytische Teilmenge von X ist. Die p -Standardstruktur von Z , die im Sinne von 4.19 nicht von p abhängt, heißt kurz **Standardstruktur**. Das kleinste zulässige p nennen wir die **Feinheit** von Z und schreiben dafür $\text{fein}(Z)$.

Je kleiner $\text{fein}(Z)$ ist, desto schärfer ist in 4.14 die Bedingung $B_z \subset A_z \forall z \in B \cap A$.

4.22 Besitzt Z eine Wege-verträgliche quasi-analytische Struktur, so ist Z schwach-analytisch von der Feinheit 0.

Zum **Beweis** vgl. 4.18.

Insbesondere ist die Menge Z aus 3.9 schwach-analytisch von der Feinheit 0.

Man sieht sehr leicht:

4.23 Die Mengen Z_0 in 3.5, 3.6 und 3.8 sind schwach-analytisch von der Feinheit 0. Die dort angegebenen quasi-analytischen Strukturen sind die Standardstrukturen.

4.24 Beispiel Sei $X := \mathbb{C}^3$ und $Z := (\mathbb{C}_{z,w}^2 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{(w, t) \in \mathbb{C}_{t,w}^2 : |t| > |w|\})$.

Sei $\mathcal{A} := \{\mathbb{C}_{z,w}^2 \times \{0\}\}, \{0\} \times \{(w, t) \in \mathbb{C}_{w,t}^2 : |t| > |w|\}$. Weil Z die komplexe Gerade $\{(0, 0)\} \times \mathbb{C}_t$ enthält, gilt: $(0, 0, 0) \notin \bigcup_{A \in \mathcal{A}_0} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_1} A$. Es gilt aber $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_2$. Also ist Z eine schwach-analytische Teilmenge von X von der Feinheit 2.

4.25 Beispiel Sei $X := \mathbb{C}^2$ und $Z := \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}} G_\alpha$, wobei $G_\alpha := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : \alpha z - w = 0\}$ ist. Weil durch den Punkt $(0, 0)$ unendlich viele Geraden verlaufen, ist $(0, 0) \notin \bigcup_{A \in \mathcal{A}_p} A \quad \forall p \in \mathbb{N}_0$. Allerdings definiert etwa

$$\mathcal{A} := \{G_0\} \cup \left\{ G_\alpha \setminus \{(0, 0)\} : 0 \neq \alpha \in \mathbb{Z} \right\}$$

gemäß 2.11 eine quasi-analytische Struktur auf Z .

4.26 Satz Sei Z eine schwach-analytische Teilmenge von X und bezeichne \mathcal{T} die Standardstruktur. Dann ist $\dim(Z, \mathcal{T}) = \dim Z$.

Beweis: Sei $q := \dim(Z, \mathcal{T})$, $r := \text{fein}(Z)$ und $p := \dim Z$. Wegen 4.3(2) ist $q \leq p$. Wir nehmen an, daß $q < p$. Dann sei $B \in \mathcal{I}_p(Z)$ eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit von X der Dimension p . Sei $z \in B$. Es existiert ein $A \in \mathcal{A}_r(Z)$ mit $z \in A$. Nun gilt: $r \leq q < p$. Also ist $B \in \mathcal{I}_r(Z)$, und es folgt: $B_z \subset A_z$, $\dim_z A \geq p$. Widerspruch! \square

5 Quasi-analytische Zerlegungen

5.1 Definition Eine quasi-analytische Schichtung (X, \mathcal{T}) auf $Z = X$ nennen wir auch eine **quasi-analytische Zerlegung** von X . Die zugehörigen Schichten, also die \mathcal{T} -Zusammenhangskomponenten von X mit der durch \mathcal{T} induzierten Topologie, heißen **Blätter** der Zerlegung. Die Menge \mathcal{D} der Blätter heißt der **Blätterraum** der Zerlegung. Mit $\mathcal{D}(x)$ bezeichnen wir dasjenige Blatt von \mathcal{D} , welches x enthält.

5.2

- (1) Auf X liege eine quasi-analytische Zerlegung vor. Dann ist X die disjunkte Vereinigung aller Blätter dieser Zerlegung.
- (2) Sei umgekehrt X disjunkte Vereinigung von Schichten. Dann bildet die Menge \mathcal{D} aller dieser Schichten den Blätterraum einer quasi-analytischen Zerlegung von X .

Der Beweis ist klar.

Wegen 5.2 notieren wir im Folgenden eine quasi-analytische Zerlegung durch Angabe des Blätterraumes \mathcal{D} und bezeichnen die zugehörige Schichtung mit (X, \mathcal{D}) .

Die Dimension des komplexen Raumes (X, \mathcal{D}) bezeichnen wir mit $\dim \mathcal{D}$. Entsprechend ist $\underline{\dim} \mathcal{D}$ zu verstehen. Die Garbe der zu (X, \mathcal{D}) tangentiellen Vektorfelder bezeichnen wir mit $\Theta^{\mathcal{D}}$.

Es sei $U \subseteq X$ zusammenhängend. Dann induziert \mathcal{D} eine quasi-analytische Struktur auf U . Wir notieren sie mit $\mathcal{D}|_U$ und nennen sie die **Beschränkung** von \mathcal{D} auf U . Die Blätter von $\mathcal{D}|_U$ sind die \mathcal{D} -Zusammenhangskomponenten der Mengen $A \cap U$, $A \in \mathcal{D}$.

5.3 Definition Eine quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} auf X heiße

- **reindimensional**, wenn $\dim \mathcal{D} = \underline{\dim} \mathcal{D}$ ist, d.h. wenn alle $A \in \mathcal{D}$ reindimensionale komplexe Räume der gleichen Dimension sind
- **glatt**, wenn alle $A \in \mathcal{D}$ Mannigfaltigkeiten sind,

- **(lokal)-analytisch**, wenn alle $A \in \mathcal{D}$ (lokal)-analytische Teilmengen von X mit der Standardstruktur sind
- **schwach-analytisch**, wenn es ein $p \in \mathbb{N}$ gibt, so daß jedes $A \in \mathcal{D}$ eine p -dicke schwach-analytische Teilmenge von X ist - das kleinste derartige p heißt die **Feinheit** von \mathcal{D} und wird mit $\text{fein}(\mathcal{D})$ notiert
- **Wege-verträglich** bzw. **(sehr) ordentlich**, wenn alle $A \in \mathcal{D}$ die entsprechende Eigenschaft haben.

Zur Erinnerung:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{ordentlich} & \implies & \text{Wege-verträglich} & \implies & \text{schwach-analytisch von der Feinheit } 0 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \\
 2.10 & & 4.22 & &
 \end{array}$$

Sei (Z, \mathcal{T}) eine Schichtung von X . Dann gilt (vgl. Beweis von 2.3.(2)): Z ist genau dann eine analytische Teilmenge von X und \mathcal{T} die Standardstruktur, wenn die Inklusion $\iota: Z \longrightarrow X$ bezüglich \mathcal{T} eigentlich ist.

Deshalb sagen wir auch in Fortsetzung von 5.3:

5.4 Definition Eine quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} heißt

- **eigentlich**, wenn \mathcal{D} analytisch ist;
- **lokal eigentlich** wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene zusammenhängende X -Umgebung U von x gibt, derart daß $\mathcal{D}|_U$ eigentlich (also analytisch) ist.

Ist $M = \mathbb{C}$ in 2.4.(1), so erhalten wir ein sehr einfaches Beispiel einer quasi-analytischen Zerlegung von \mathbb{C}^2 . Sie ist reindimensional, glatt, analytisch und sehr ordentlich. — Wir verallgemeinern das Beispiel:

5.5 Es seien $D_1 \subseteq \mathbb{C}^p$ und $D_2 \subseteq \mathbb{C}^q$ zwei Gebiete (d.h. offen und zusammenhängend), ferner sei $D := D_1 \times D_2$. Dann ist $\mathcal{D} := \{D_1 \times \{w\} : w \in D_2\}$ eine quasi-analytische Zerlegung von D . Sie ist rein p -dimensional, glatt, analytisch und sehr ordentlich.

5.6 Sei $f: X \longrightarrow W$ eine holomorphe Abbildung in den komplexen Raum W . Dann sind alle Niveaumengen von f (das sind die Zusammenhangskomponenten [bezüglich der X -Topologie] der Fasern $f^{-1}(w)$, $w \in W$) analytische Teilmengen von X und wegen 2.3 auf kanonische Weise Schichten. In diesem Sinne ist

$$\mathcal{D}_f := \{A : A \text{ ist eine Niveaumenge von } f\}$$

eine quasi-analytische Zerlegung von X . Sie ist analytisch und sehr ordentlich.

Ist die Abbildung in 5.6 offen, so dürfen wir f als surjektiv voraussetzen. Da ein komplexer Raum Y genau dann irreduzibel ist, wenn $Y \setminus \text{Sing } Y$ zusammenhängend ist (vgl. [K/K]), folgert man, daß W irreduzibel und lokal-irreduzibel ist. Indem wir W gegebenenfalls durch seine Normalisierung ersetzen, dürfen wir W sogar als normal voraussetzen. Es folgt, daß \mathcal{D} rein p -dimensional ist, wobei $p := n - \dim W$ (vgl. [K/K, 49.16]).

Sei \mathcal{F} eine p -dimensionale reguläre holomorphe Blätterung auf X .¹ \mathcal{F} ist definiert durch eine reguläre involutive analytische Untergarbe $\Theta_{\mathcal{F}}$ von Θ vom Rang p bzw. eine reguläre involutive analytische Untergarbe $\Omega_{\mathcal{F}}$ von Ω vom Rang $q := n - p$ (dabei sei Ω die Garbe der holomorphen Pfaffschen Formen auf X). Die Garben $\Theta_{\mathcal{F}}$ und $\Omega_{\mathcal{F}}$ sind dual zueinander. \mathcal{F} kann lokal definiert werden durch gewisse holomorphe Submersionen, d.h. zu jedem $x \in X$ existiert eine offene zusammenhängende Umgebung U von x und eine holomorphe Submersion $f: U \longrightarrow W$ auf eine komplexe Mannigfaltigkeit mit $\Omega_{\mathcal{F}}|_U = f^*(\Omega_W)$. Die durch die lokalen holomorphen Submersionen $f: U \longrightarrow W$ gemäß 5.6 definierten quasi-analytischen Zerlegungen auf den Gebieten U in X können zu einer eindeutig definierten quasi-analytischen Zerlegung $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ auf X verklebt werden. Lokal hat $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ die Form von Beispiel 5.5.

¹Hier und im Folgenden verweisen wir für Grundbegriffe der Theorie der holomorphen Blätterungen auf [R-1]

5.7 Sei \mathcal{F} eine p -dimensionale reguläre holomorphe Blätterung auf X . Dann ist $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ glatt, rein p -dimensional und sehr ordentlich.

K. Spallek hat gezeigt (vgl. [Spa]):

5.8 Satz Sei Θ' eine involutive kohärente Untergarbe von Θ . Dann gibt es genau eine glatte quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D}' von X mit der Eigenschaft:

$$\Theta'|_x = \mathbf{T}(x, \mathcal{D}'(x)) \quad \forall x \in X.$$

Wir nennen diese eindeutig bestimmte Zerlegung \mathcal{D}' die **Spallek-Zerlegung** zu Θ' .

5.9 Satz In der Situation von 5.8 ist die Spallek-Zerlegung \mathcal{D}' von Θ' sehr ordentlich, insbesondere Wege-verträglich.

Beweis: Es sei $A \in \mathcal{D}'$, $\dim A = p$ und $x_0 \in A$. Im Fall von $p = \text{rank } \Theta'$ liegt in einer offenen X -Umgebung von x_0 die Situation 5.7 vor und wir sind fertig. Es sei also $p < \text{rank } \Theta'$.

Wir betrachten eine zusammenhängende offene X -Umgebung X_0 von x_0 , auf der ein Erzeugendensystem $\vartheta^{(1)}, \dots, \vartheta^{(m)}$ von Θ' existiert. Wir dürfen annehmen:

- $\vartheta^{(1)}|_x, \dots, \vartheta^{(p)}|_x$ sind linear unabhängig für alle $x \in X_0$.

Es sei \mathcal{D}'_p die Menge aller Blätter von $\mathcal{D}'|_{X_0}$ der Dimension p . Dann ist

$$Z := \{x \in X_0 : \dim \Theta'|_x \leq p\} = \{x \in X_0 : \dim \Theta'|_x = p\}$$

eine analytische Teilmenge von X_0 und disjunkte Vereinigung der $C \in \mathcal{D}'_p$. Deshalb induziert \mathcal{D}'_p eine quasi-analytische Struktur \mathcal{T} auf Z . Wir betrachten im Weiteren die Schichtung (Z, \mathcal{T}) .

Sei $T_x := \sum_{\nu=1}^p \mathbb{C} \vartheta^{(\nu)}|_x$ für $x \in X_0$. Dann ist $T(Z, x) = T_x$ für alle $x \in Z$.

Im Weiteren bezeichnen wir mit $|\cdot|$ die euklidische Norm und mit B_1 die offenen Kugeln im \mathbb{C}_z^p und mit B_2 die offenen Kugeln im \mathbb{C}_w^q (dabei sei $q := n - p$). Außerdem machen wir gelegentlich Gebrauch von den üblichen Identifikationen

$$T'_x = \sum_{\nu=1}^p \mathbb{C} \frac{\partial}{\partial z_\nu} \Big|_x = \mathbb{C}_z^p, \quad T''_x = \sum_{\nu=1}^q \mathbb{C} \frac{\partial}{\partial w_\nu} \Big|_x = \mathbb{C}_w^q \quad \text{für } x = (z, w) \in \mathbb{C}^n.$$

Sei $B(x, \varepsilon_1, \varepsilon_2) := B_1(z, \varepsilon_1) \times B_2(w, \varepsilon_2)$ für $x = (z, w) \in \mathbb{C}^n$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$. Wir dürfen annehmen:

- $X_0 \Subset \mathbb{C}^n$, $x_0 = 0$ und X_0 ist von der Form $X_0 = B(0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$,
- $A_0 := B_1(0, \varepsilon_1) \times \{0\}$ ist ein \mathcal{D}' -Plättchen von A
- für alle $x \in A_0$ ist $\vartheta^{(\nu)}|_x = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_\nu}|_x & \nu = 1, \dots, p, \\ 0 & \nu = p+1, \dots, m. \end{cases}$
- $T_x \cap T''_x = \{0\}$ für alle $x \in X_0$.

Für die Projektion $\pi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}_z^p$ gilt dann: $\pi: T_x \rightarrow T'_z$ ist –bei Benutzung der üblichen Identifikationen– für alle $x \in X_0$ ein Isomorphismus und $\pi: Z \rightarrow B_1(0, \varepsilon_1)$ ist bezüglich \mathcal{T} lokal biholomorph.

Wir betrachten den Isomorphismus $\pi: T_x \rightarrow T'_z$ genauer:

Für $\nu = 1, \dots, p$ ist

$$\vartheta^{(\nu)} = \frac{\partial}{\partial z_\nu} + \eta_1^{(\nu)} + \eta_2^{(\nu)}$$

mit

$$\eta_1^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^p a_\lambda^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial z_\lambda}, \quad \eta_2^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^q b_\mu^{(\nu)} \frac{\partial}{\partial w_\mu}.$$

Sei $\zeta = \sum_{\nu=1}^p \zeta_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}$ und $\vartheta = \sum_{\nu=1}^p c_\nu \vartheta^{(\nu)}|_x \in T_x$ der Vektor mit $\pi(\vartheta) = \zeta$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = N \cdot \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_p \end{pmatrix}$$

mit einer auf X_0 holomorphen Matrix N .

Weil $N(0)$ die Einheitsmatrix ist, dürfen wir annehmen:

- $|(c_1, \dots, c_p)| \leq 2|\zeta|$.

Außerdem dürfen wir noch annehmen:

- $|\eta_2^{(\nu)}|_x < \frac{1}{p}$ für $\nu = 1, \dots, p$ und $x \in U_0$.

Für die Komponente $\sum_{\nu=1}^p c_\nu \eta_2^{(\nu)}$ von ϑ gilt dann:

$$\left| \sum_{\nu=1}^p c_\nu \eta_2^{(\nu)} \right| \leq 2|\zeta| \quad \text{überall auf } X_0 \cap \{z\} \times \mathbb{C}_w^q.$$

Aus beweistechnischen Gründen denken wir uns $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ so gewählt, daß

- $2\varepsilon_1 < \varepsilon_2$

Die folgenden Betrachtungen zu dem lokalen Biholomorphismus $\pi: Z \longrightarrow B_1(0, \varepsilon_1)$ sind für das Weitere wichtig.

Sei $x_\bullet = (z_\bullet, w_\bullet) \in Z$. Dann existiert ein \mathcal{T} -Plättchen C_\bullet zu x_\bullet derart, daß $\pi: C_\bullet \longrightarrow U_\bullet := \pi(C_\bullet)$ eine biholomorphe Abbildung ist. Wir dürfen annehmen, daß U_\bullet eine Kugel $B_1(z_\bullet, \rho)$ ist. Wir nennen $\pi: C_\bullet \longrightarrow B_1(z_\bullet, \rho)$ dann eine **\mathcal{T} -Kugel** mit Mittelpunkt x_\bullet .

Seien $\gamma, \tilde{\gamma}: I \longrightarrow Z$ zwei \mathcal{T} -Wege (dabei sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) mit $\pi \circ \gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$. Gibt es einen Punkt $t_\bullet \in I$ mit $\gamma(t_\bullet) = \tilde{\gamma}(t_\bullet)$, so ist $\gamma = \tilde{\gamma}$. Wir nennen γ die **\mathcal{T} -Liftung** von $\pi \circ \gamma$ durch den Punkt $x_\bullet = \gamma(t_\bullet)$.

Doch nun weiter! Wir bezeichnen im Folgenden \mathbb{C}_z^p -Komponenten mit dem Index 1 und \mathbb{C}_w^q -Komponenten mit dem Index 2.

Wir betrachten ein konstantes Vektorfeld

$$\zeta = \sum_{\nu=1}^p \zeta_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}, \quad (\zeta_1, \dots, \zeta_p) \in \mathbb{C}^p, |\zeta| = 1$$

auf $B_1(0, \varepsilon_1)$. Zu ζ existiert ein holomorphes Vektorfeld ϑ auf X_0 mit $\pi(\vartheta|_x) = \zeta|_z \forall x = (z, w) \in X_0$. Es gilt: $|\vartheta_1|_x = 1$, und $|\vartheta_2|_x| \leq 2$ für alle $x \in X_0$.

Wir wählen jetzt δ_1, δ_2 mit $0 < \delta_1 < \varepsilon_1/4$ und $\delta_1 < \delta_2 < \varepsilon_2/4$. Wir betrachten einen Punkt $x_\bullet = (z_\bullet, w_\bullet) \in Z \cap B(0, \delta_1, \delta_2)$ und dazu ein konstantes Vektorfeld ζ sowie das zugehörige Vektorfeld ϑ wie oben. Sei $\gamma: I \longrightarrow X_0$ die maximale Lösung der (reellen) Differentialgleichung $\gamma' = \vartheta \circ \gamma$ mit $\gamma(0) = x_\bullet$. I ist ein offenes Intervall in \mathbb{R} . Mit Standardüberlegungen zeigt man, daß $[0, \delta_1] \subset I$.

Wir betrachten eine \mathcal{T} -Kugel $\pi: C_\bullet \longrightarrow B_1(z_\bullet, \rho)$ mit $0 < \rho \leq \delta_1$. Für den Weg

$$\tilde{\gamma}: [0, \rho] \longrightarrow C_\bullet, \quad \tilde{\gamma}(t) := (\pi|_{C_\bullet})^{-1}(z_\bullet + t(\zeta_1, \dots, \zeta_p))$$

gilt dann $\pi(\tilde{\gamma}'(t)) = \zeta$, also $\tilde{\gamma}'(t) = \vartheta \circ \tilde{\gamma}(t)$ und $\tilde{\gamma}(0) = x_\bullet$. Folglich ist $\tilde{\gamma} = \gamma|_{[0, \rho]}$. Der Weg $\gamma|_{[0, \rho]}$ verläuft in C_\bullet . Weil $Z \setminus X_0$ abgeschlossen ist, folgt $\gamma(\rho) \in Z$. Ist nun $t_* \in]0, \delta_1]$ mit $x_* := \gamma(t_*) \in Z$, so folgt mit der selben Argumentation wie im Fall $t = 0$, daß γ auf einer $]0, \delta_1]$ -offenen Umgebung von t_* in einem \mathcal{T} -Plättchen verläuft und daß die Werte von γ in den Endpunkten in Z liegen. Nun schließt man sofort, daß γ ein in Z verlaufender \mathcal{T} -Weg ist; γ ist die \mathcal{T} -Liftung der Strecke $[z_\bullet, z_\bullet + \delta_1(\zeta_1, \dots, \zeta_p)]$ durch x_\bullet . Wir nennen $\gamma: [0, \delta_1] \longrightarrow Z$ die **\mathcal{T} -Strecke** mit "Startpunkt" x_\bullet , "Richtung" ζ und "Länge" δ_1 .

Wir halten fest: Ist $\gamma: [0, \delta_1] \rightarrow Z$ eine \mathcal{T} -Strecke wie oben und trifft γ eine \mathcal{T} -Kugel $\pi: C_* \rightarrow B_1(z_*, \rho)$, so gilt

$$\gamma(t) = (\pi|_{C_*})^{-1}(z_* + t\zeta) \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ mit } z_* + t\zeta \in B_1(z_*, \rho).$$

Nun sei

$$C_\bullet := \{x \in Z : \text{es gibt eine in } x_\bullet \text{ startende } \mathcal{T}\text{-Strecke } \gamma: [0, \delta_1] \rightarrow Z \text{ und } t \in [0, \delta_1[\text{ mit } \gamma(t) = x\}.$$

Man zeigt nun mit leichter Mühe:

- (1) C_\bullet ist \mathcal{T} -offen,
- (2) C_\bullet ist eine analytische Teilmenge von $U_\bullet := B((z_\bullet, 0), \delta_1, \varepsilon_2)$,
- (3) C_\bullet ist die \mathcal{D}'_p -Komponente von $Z \cap U_\bullet$, welche x_\bullet enthält.

Nun kommen wir zum entscheidenden Argument für den Beweis unseres Satzes 5.9.

Sei $x_\bullet \in Z \cap B(0, \delta_1/2, \delta_2)$. Dann ist $B(0, \delta_1/2, \varepsilon_2) \subset B(z_\bullet, \delta_1, \varepsilon_2)$. Also sind alle \mathcal{D}' -Komponenten von $A \cap B(0, \delta_1/2, \delta_2)$ analytische Mengen in $B(0, \delta_1/2, \delta_2)$, insbesondere bezüglich der Relativtopologie abgeschlossen. \square

Im Fall einer regulären Blätterung \mathcal{F} ist die Spallek-Zerlegung $\mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$ von $\Theta_{\mathcal{F}}$ natürlich gleich der Zerlegung $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$.

Sei \mathcal{F} eine p -dimensionale (kohärente) holomorphe Blätterung auf X ; Singularitäten sind zugelassen. \mathcal{F} ist definiert durch eine vollständige involutive kohärente \mathcal{O} -Untergarbe $\Theta_{\mathcal{F}}$ von Θ vom Rang p bzw. eine vollständige involutive kohärente \mathcal{O} -Untergarbe $\Omega_{\mathcal{F}}$ von Ω vom Rang $q := n - p$. Die Garben $\Theta_{\mathcal{F}}$ und $\Omega_{\mathcal{F}}$ sind dual zueinander. Es ist $\text{Sing } \mathcal{F} = \text{Sing } \Theta_{\mathcal{F}} = \text{Sing } \Omega_{\mathcal{F}}$ eine analytische Menge der Kodimension ≥ 2 . Die Einschränkung $\mathcal{F}|_{(X \setminus \text{Sing } \mathcal{F})}$ ist eine reguläre holomorphe Blätterung. Die Spallek-Zerlegung $\mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$ von $\Theta_{\mathcal{F}}$ nennen wir auch die **Spallek-Zerlegung von \mathcal{F}** .

Neben $\mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$ kann in geeigneten Fällen eine weitere mit \mathcal{F} zusammenhängende quasi-analytische Zerlegung von X eingeführt werden, vgl. [R-1] und [R-2]. Dazu fundamental ist der Begriff der Stammfunktion: Sei $U \subseteq X$. Eine Funktion $f \in \mathcal{O}(U)$ heißt **\mathcal{F} -Stammfunktion**, wenn $df \in \Omega_{\mathcal{F}}(U)$ gilt. Die \mathcal{F} -Stammfunktionen bilden die Untergarbe $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ von \mathcal{O} .

Eine Schicht (Z, \mathcal{T}) von X heißt eine **\mathcal{F} -Integralvarietät**, wenn für alle $z \in Z$ und $f \in (\mathcal{O}_{\mathcal{F}})_z$ die Beschränkung des Keimes f auf (Z, \mathcal{T}) konstant ist.

5.10 Satz Jedes Blatt $A \in \mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$ ist eine \mathcal{F} -Integralvarietät.

Beweis: Sei A_0 ein Plättchen von A , $x \in A_0$, $f \in (\mathcal{O}_{\mathcal{F}})_x$. Dann gilt: $df \in (\Omega_{\mathcal{F}})_x$, $df((\Theta_{\mathcal{F}})_x) = 0$, $d(f|_{A_0}) = 0$, $f|_{A_0} = \text{const}$. \square

5.11 Definition Eine zusammenhängende lokal-analytische Teilmenge A von X heißt ein **lokales \mathcal{F} -Blatt**, wenn gilt:

- (1) A ist eine \mathcal{F} -Integralvarietät
- (2) $\dim A \geq p$ ($= \dim \mathcal{F}$)
- (3) Ist B eine weitere lokal-analytische Teilmenge von X mit den Eigenschaften (1) und (2), so gilt $B_x \subset A_x$ für alle $x \in A \cap B$.

Sei $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ die Menge der lokalen \mathcal{F} -Blätter und

$$X_{\mathcal{F}} := \bigcup_{A \in \mathcal{A}_{\mathcal{F}}} A.$$

$\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ erfüllt die Voraussetzungen von 2.11, definiert deshalb eine quasi-analytische Struktur auf $X_{\mathcal{F}}$. Die Schichten von $(X_{\mathcal{F}}, \mathcal{T})$ heissen **\mathcal{F} -Blätter**. Sie sind \mathcal{F} -Integralvarietäten. Im Allgemeinen ist $X_{\mathcal{F}} \neq X$. Wenn $X_{\mathcal{F}} = X$, so sagen wir **\mathcal{F} hat Blätter überall** und bezeichnen mit $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ die Menge der \mathcal{F} -Blätter (**Blätterraum**). Ist \mathcal{F} regulär, so stimmt dieser Blätterraum mit dem in 5.7 genannten Blätterraum $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ überein. Im Allgemeinen ist $\mathcal{D}'_{\mathcal{F}} \neq \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$, auch wenn \mathcal{F} Blätter überall hat:

5.12 Beispiel Sei $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $(z, w) \mapsto z \cdot w$, $\Omega' := \mathcal{O}df = \mathcal{O}(w dz + z dw)$. Dann ist Ω' offenbar involutiv und vollständig, weil $\text{Sing } \Omega' = \{0\}$ 2-codimensional ist. Die Garbe $\Theta' = \mathcal{O}(z \frac{\partial}{\partial z} - w \frac{\partial}{\partial w})$ ist die Annulatorgarbe von Ω' . Die Garben Ω' bzw. Θ' definieren eine 1-dimensionale holomorphe Blätterung \mathcal{F} auf X . Es besteht $\mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$ aus den Blättern $\{0\}$, $\mathbb{C}_z^* \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{C}_w^*$ sowie $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : zw = c\}$, $c \in \mathbb{C}^*$. \mathcal{F} hat Blätter überall und $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ besteht aus den Blättern $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : zw = c\}$, $c \in \mathbb{C}$.

Beweis: Sei $x_0 := (z_0, w_0)$. Dann ist $\Theta'|_{x_0} = \mathbb{C} \cdot (z_0, -w_0)$, woraus sofort die Aussage über $\mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$ folgt. Auf $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ ist \mathcal{F} regulär und besitzt dieselben Blätter wie $\mathcal{D}'_{\mathcal{F}}|_{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}$, also die Blätter $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : zw = c\}$, $c \in \mathbb{C}^*$, sowie $\mathbb{C}_z^* \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathbb{C}_w^*$. Nehmen wir nun 0 hinzu, so ist offenbar die X -abgeschlossene Hülle von $(\mathbb{C}_z^* \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{C}_w^*)$, das ist $(\mathbb{C}_z \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{C}_w)$, eine \mathcal{F} -Integralvarietät. Weil 5.11 erfüllt ist, handelt es sich um ein lokales \mathcal{F} -Blatt und dann sofort um ein \mathcal{F} -Blatt. \square

5.13 Satz Sei \mathcal{F} eine p -dimensionale holomorphe Blätterung mit Blättern überall. Dann ist die quasi-analytische Zerlegung $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ von X schwach-analytisch von der Feinheit $\leq p$.

Beweis: Sei $A \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ und $x_0 \in A$. Wir betrachten ein lokales \mathcal{F} -Blatt A_0 mit $x_0 \in A_0 \subset A$ und zeigen $A_0 \in \mathcal{A}_p(A)$. Sei $B \in \mathcal{I}_p(A)$, $B \subset A$. Wir zeigen, daß jede X -Zusammenhangskomponente B' von B eine \mathcal{F} -Integralvarietät ist. Dann folgt mit 5.11.(3), daß $B_z \subset (A_0)_z$ für alle $z \in A_0 \cap B$ und wir sind fertig.

Wir dürfen annehmen, daß B zusammenhängend ist. Sei $x \in B$ und $f \in (\mathcal{O}_{\mathcal{F}})_x$. Wir betrachten eine zusammenhängende offene X -Umgebung U von x mit den folgenden Eigenschaften: $B \cap U$ ist zusammenhängend und $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(U)$. Ist C eine $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ -Komponente von $A \cap U$, so ist f auf C und dann auch auf $B \cap U \cap C$ konstant. Da $A \cap U$ höchstens abzählbar viele $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ -Komponenten besitzt, ist $N := f(B \cap U)$ eine höchstens abzählbare Teilmenge von \mathbb{C} . Da N zugleich auch zusammenhängend ist, muß N einelementig sein, das heißt $f|_{B \cap U}$ ist konstant. Also ist B eine Integralvarietät. \square

5.14 Definition Sei \mathcal{F} eine p -dimensionale holomorphe Blätterung. Ein \mathcal{F} -Blatt heißt **stark**, wenn für jedes lokale \mathcal{F} -Blatt $A_0 \subset A$ gilt:

Ist B eine lokal-analytische Teilmenge von X und eine \mathcal{F} -Integralvarietät, so ist $B_x \subset (A_0)_x$ für alle $x \in A_0 \cap B$ (beachte, daß hier im Vergleich zu 5.11.(2) die Forderung $\dim B \geq p$ weggelassen wurde).

Die Blätterung \mathcal{F} heißt **stark**, wenn \mathcal{F} überall starke Blätter besitzt.

5.15 Satz Sei \mathcal{F} eine starke p -dimensionale Blätterung. Dann ist $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ schwach-analytisch von der Feinheit 0. Zu jedem $A \in \mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$ gibt es ein $B \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ mit $A \subset B$.

Beweis: Der erste Teil der Aussage folgt mit einer leichten Modifikation des Beweises von 5.13. Sei $A \in \mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$. Wir betrachten ein $\mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$ -Plättchen A_0 von A . Sei $x_0 \in A_0$ und $B \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ mit $x_0 \in B$. Sei B_0 ein lokales \mathcal{F} -Blatt mit $x_0 \in B_0 \subset B$. Wegen 5.10 dürfen wir $A_0 \subset B_0$ annehmen. Also muß $A \cap B$ eine $\mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$ -offene Teilmenge von A sein. Wir nehmen an daß $A \cap B \neq A$. Sei $x_1 \in A$ ein $\mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$ -Randpunkt von $A \cap B$. Wir betrachten ein $\mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$ -Plättchen $A_1 \subset A$ mit $x_1 \in A_1$ sowie ein $C \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ mit $x_1 \in C$. Mit obigem Argument gibt es ein lokales \mathcal{F} -Blatt C_1 mit $A_1 \subset C_1 \subset C$. In A_1 liegen Punkte aus $A \cap B$. Es folgt: $B \cap C \neq \emptyset$, $B = C$, $x_1 \in B$. Widerspruch! Also muß $A \subset B$ gelten. \square

Wir können die zweite Aussage in 5.15 auch so formulieren:

5.16 Satz Sei \mathcal{F} eine starke p -dimensionale Blätterung. Dann definiert $\mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$ auf jedem $B \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ eine Schichtung.

Ist \mathcal{F} eine 1-dimensionale Blätterung mit Blättern überall, so ist \mathcal{F} offenbar automatisch stark. Das gilt insbesondere für unser Beispiel 5.12.

Für quasi-analytische Zerlegungen von X sind zwei Begriffe von Stammfunktion sinnvoll:

5.17 Definition Sei \mathcal{D} eine quasi-analytische Zerlegung von X , $U \subseteq X$ und $f \in \mathcal{O}(U)$. Dann heißt f eine **\mathcal{D} -Stammfunktion**, wenn für jede X -Zusammenhangskomponente U' von U die Einschränkung $f|_{U'}$ auf den Blättern von $\mathcal{D}|_{U'}$ konstant ist, oder anders formuliert, wenn f bezüglich der \mathcal{D} -Topologie lokal konstant ist. f heißt eine **differentielle \mathcal{D} -Stammfunktion**, wenn $df((\Theta^{\mathcal{D}})_x) = 0$ für alle $x \in U$. Die \mathcal{D} -Stammfunktionen bilden die Garbe $\mathcal{O}^{\mathcal{D}}$, die differentiellen \mathcal{D} -Stammfunktionen die Garbe $\mathcal{O}_d^{\mathcal{D}}$.

5.18 Sei \mathcal{D} eine quasi-analytische Zerlegung von X . Dann ist $\mathcal{O}^{\mathcal{D}} \subset \mathcal{O}_d^{\mathcal{D}}$.

Beweis: Sei $U \subseteq X$, $f \in \mathcal{O}(U)$ eine \mathcal{D} -Stammfunktion und $x \in U$. Sei B ein \mathcal{D} -Plättchen mit $x \in B \subset U$. Wir betrachten $g := f - f(x)$. Dann ist g eine auf B verschwindende holomorphe Funktion. Deshalb gilt: $dg = df$ annulliert alle Tangentialvektorräume $T(B, y)$, $y \in B$. Daraus folgt unsere Aussage. \square

Da allgemeine quasi-analytische Zerlegungen sehr chaotisch sein können, ist in 5.18 die Gleichheit im Allgemeinen nicht gegeben:

5.19 Beispiel Sei $X = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{C}_w$. Für $x = (z, w) \in X$ sei das Blatt $\mathcal{D}(x)$ wie folgt definiert:

$$\mathcal{D}(x) := \begin{cases} \{x\} & \text{wenn } z \text{ rational ist, d.h. } z \in \mathbb{Q}, \\ \{z\} \times \mathbb{C}_w & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das System der $\mathcal{D}(x)$, $x \in X$, definiert eine quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} auf X . Dabei ist $\Theta^{\mathcal{D}}$ die Nullgarbe. Sei D_1 ein Gebiet in \mathbb{C}_z , D_2 ein Gebiet in \mathbb{C}_w und $D := D_1 \times D_2$. Dann ist

$$\mathcal{O}^{\mathcal{D}}(D) = \{f \in \mathcal{O}(D) : \frac{\partial f}{\partial w} = 0\} = \mathcal{O}(D_1), \quad \mathcal{O}_d^{\mathcal{D}}(D) = \mathcal{O}(D).$$

5.20 Sei Θ' eine involutive kohärente \mathcal{O} -Untergarbe von Θ und \mathcal{D}' die zu Θ' gehörige Spallek-Zerlegung. Dann ist $\mathcal{O}^{\mathcal{D}'} = \mathcal{O}_d^{\mathcal{D}'}$.

Beweis: Zunächst ist $\Theta' \subset \Theta^{\mathcal{D}'}$. Nun sei $U \subseteq X$ und $f \in \mathcal{O}_d^{\mathcal{D}'}(U)$. Dann gilt insbesondere: $df(\Theta'_x) = 0$ für alle $x \in U$. Dann muß f auf den in U liegenden \mathcal{D}' -Plättchen konstant sein. \square

5.21 Sei \mathcal{F} eine p -dimensionale holomorphe Blätterung mit Blättern überall und $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$, $\mathcal{D}' := \mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$. Dann gilt:

$$\mathcal{O}^{\mathcal{D}} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_d^{\mathcal{D}} = \mathcal{O}^{\mathcal{D}'} = \mathcal{O}_d^{\mathcal{D}'}.$$

Beweis: Weil jedes \mathcal{F} -Blatt eine \mathcal{F} -Integralvarietät ist, gilt: $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{O}^{\mathcal{D}}$. Sei $U \subseteq X$ und $f \in \mathcal{O}_d^{\mathcal{D}}(U)$. Auf $U^* := U \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ gilt dann (weil $\Omega_{\mathcal{F}}$ und $\Theta_{\mathcal{F}}$ zueinander dual sind): $df|_{U^*} \in \Omega_{\mathcal{F}}(U^*)$. Weil $\Omega_{\mathcal{F}}$ vollständig ist, folgt: $df \in \Omega_{\mathcal{F}}(U)$, also $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(U)$. Also gilt auch $\mathcal{O}_d^{\mathcal{D}} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. Weil jedes $A \in \mathcal{D}'$ eine \mathcal{F} -Integralvarietät ist, gilt: $\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{O}^{\mathcal{D}'}$. Sei $U \subseteq X$ und $f \in \mathcal{O}_d^{\mathcal{D}'}(U)$. Dann schließt man wie oben, daß $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(U)$. Also gilt auch $\mathcal{O}_d^{\mathcal{D}'} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. \square

6 Durch Abbildungen definierte quasi-analytische Zerlegungen und holomorphe Blätterungen

Wir beginnen mit einigen allgemeinen Betrachtungen, die an unser Beispiel 5.6 anknüpfen.

Sei $f: X \rightarrow W$ eine holomorphe Abbildung in den komplexen Raum W . Dann bezeichnen wir mit \mathcal{D}_f die durch f auf X definierte quasi-analytische Zerlegung, also das System der Niveaumengen von f . Sei $\Omega'_f := f^*(\Omega_W)$. Ist W eine lokal-analytische Teilmenge eines \mathbb{C}^N (bei einer lokalen Betrachtung kann man davon stets ausgehen) und $f = (f_1, \dots, f_N)$, so ist $\Omega'_f = \sum_{j=1}^N \mathcal{O} df_j$. Wir nennen $\text{Sing } f := \text{Sing } \Omega_f$ die **Singularitätenmenge** von f . Sie ist eine niederdimensionale analytische Teilmenge von X . Sei $\Omega_f := \overline{\Omega'_f}$ die Vervollständigung von Ω'_f und $\Theta_f := \Omega_f^0$ die Annulatorgarbe von Ω_f . Dann definieren Ω_f und Θ_f dieselbe holomorphe Blätterung \mathcal{F}_f auf X ; diese hat die Dimension $p = n - q$, dabei ist $q = \text{Rang } \Omega_f = \text{Rang } \Omega'_f$, $p = \text{Rang } \Theta_f$. In [R-1] wird f ein schwaches Integral von \mathcal{F}_f genannt.

Sei $x_0 \in X \setminus \text{Sing } f$. Wir betrachten eine zusammenhängende offene X -Umgebung U von x_0 , $U \subset X \setminus \text{Sing } f$, sowie $f: U \rightarrow W$. Wir dürfen annehmen, daß W eine lokal-analytische Teilmenge eines \mathbb{C}^N ist. Dann hat die Abbildung $f = (f_1, \dots, f_N): U \rightarrow \mathbb{C}^N$ überall den konstanten Rang q . Aufgrund des Rangtheorems (vgl. etwa [ReTr, Seite 313] oder [N, Seite 18]) dürfen wir sogar von der Situation 5.5 ausgehen, d.h. U ist ein Gebiet im \mathbb{C}^n von der Form $U = D_1 \times D_2$, wobei $D_1 \subset \mathbb{C}_z^p$, $D_2 \subset \mathbb{C}_w^q$ Gebiete sind, und es ist $W = D_2$, $f(z, w) = w$.

6.1 Satz In der oben beschriebenen Situation gilt auf $X \setminus \text{Sing } f$: \mathcal{F}_f ist eine reguläre holomorphe Blätterung, deren zugehörige quasi-analytische Zerlegung dort mit \mathcal{D}_f übereinstimmt.

Aus 6.1 und der Vollständigkeit der Garbe Ω_f bzw. Θ_f folgt:

6.2 Ist $f_\bullet: X \rightarrow W_\bullet$ eine weitere holomorphe Abbildung und gilt $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f_\bullet}$, so ist $\mathcal{F}_f = \mathcal{F}_{f_\bullet}$.

6.3 Definition Seien \mathcal{D} eine quasi-analytische Zerlegung und \mathcal{F} eine holomorphe Blätterung von X . Unter einer **lokalen Beschreibung von \mathcal{D} bzw. \mathcal{F}** verstehen wir eine holomorphe Abbildung $f: U \rightarrow W$ einer zusammenhängenden X -offenen Teilmenge von X in einen komplexen Raum W derart, daß $\mathcal{D}|_U = \mathcal{D}_f$ bzw. $\mathcal{F}|_U = \mathcal{F}_f$ ist. \mathcal{D} bzw. \mathcal{F} heißt **abbildungsdefiniert**, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine lokale Beschreibung $f: U \rightarrow W$ von \mathcal{D} bzw. \mathcal{F} gibt mit $x \in U$.

6.4 Satz Sei \mathcal{D} eine abbildungsdefinierte quasi-analytische Zerlegung von X . Dann definiert \mathcal{D} in natürlicher Weise eine abbildungsdefinierte holomorphe Blätterung auf X .

Beweis: Seien $f: U \rightarrow W$ und $f_\bullet: U_\bullet \rightarrow W_\bullet$ lokale Beschreibungen von \mathcal{D} . Wegen 6.2 gilt auf $U \cap U_\bullet$: $\mathcal{F}_f|_{U \cap U_\bullet} = \mathcal{F}_{f_\bullet}|_{U \cap U_\bullet}$. Deshalb können die lokal definierten Blätterungen \mathcal{F}_f zu einer holomorphen Blätterung \mathcal{F} auf X verklebt werden. \mathcal{F} ist nach Konstruktion abbildungsdefiniert. \square

6.5 Definition Eine quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} von X heißt im Punkte $x \in X$ **regulär**, wenn es eine lokale Beschreibung $f: U \rightarrow \mathbb{C}^q$ von \mathcal{D} mit $x \in U$ gibt, bei der f eine holomorphe Submersion ist. Die X -offene Menge

$$\text{Reg } \mathcal{D} := \{x \in X : \mathcal{D} \text{ ist in } x \text{ regulär}\}$$

heißt die **reguläre Menge** von \mathcal{D} und $\text{Sing } \mathcal{D} := X \setminus \text{Reg } \mathcal{D}$ die **Singularitätenmenge** von \mathcal{D} . Wenn $\text{Reg } \mathcal{D} = X$ ist, heißt \mathcal{D} **regulär**.

Die regulären Zerlegungen entsprechen offensichtlich genau den regulären Blätterungen.

Eine Teilmenge M von X heißt bekanntlich **analytisch dünn**, wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene X -Umgebung U von x und eine niederdimensionale analytische Menge A in U gibt mit $M \cap U \subset A$. Aus 6.1 folgt:

6.6 Satz Die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} von X sei abbildungsdefiniert. Dann ist $\text{Sing } \mathcal{D}$ analytisch dünn.

6.7 Satz Die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} von X sei rein p -dimensional und $\Theta^{\mathcal{D}}$ sei regulär vom Rang p . Dann ist \mathcal{D} regulär.

Zum **Beweis** vgl. [H/K/R, Satz 6]

6.8 Definition Eine holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow W$ von X in einen komplexen Raum W heißt **fasertreu**, wenn für alle Gebiete $U \subseteq X$ und alle $g \in \mathcal{O}(U)$ gilt:
ist $g|_{U \setminus \text{Sing } f}$ eine Stammfunktion von $\mathcal{D}_f|_{U \setminus \text{Sing } f}$, so ist g bereits eine Stammfunktion von $\mathcal{D}_f|_U$.

Wir wollen die Eigenschaft, daß $g|_{U \setminus \text{Sing } f}$ eine Stammfunktion von $\mathcal{D}_f|_{U \setminus \text{Sing } f}$ ist, näher untersuchen. Dazu sei $\Theta'_f := \Theta^{\mathcal{D}_f}$.

Es ist $\Theta'_f|_{X \setminus \text{Sing } f} = \Theta_f|_{X \setminus \text{Sing } f}$ und dann $\Theta'_f \subset \Theta_f$, weil Θ_f vollständig ist.

Sei $\omega \in \Omega(U)$. Dann gilt

$$\omega((\Theta'_f)_x) = 0 \quad \forall x \in U \iff \omega((\Theta_f)_x) = 0 \quad \forall x \in U \iff \omega \in \Omega_f(U).$$

Für $g \in \mathcal{O}(U)$ gilt:

$$\begin{aligned} g|_{U \setminus \text{Sing } f} \in \mathcal{O}^{\mathcal{D}_f}(U \setminus \text{Sing } f) &\iff g|_{U \setminus \text{Sing } f} \in \mathcal{O}_d^{\mathcal{D}_f}(U \setminus \text{Sing } f) \quad (\text{vgl. 6.1}) \\ &\iff dg \in \Omega_f(U \setminus \text{Sing } f) \\ &\iff dg \in \Omega_f(U) \quad (\text{weil } \Omega_f \text{ vollständig ist}) \\ &\iff g \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}_f}(U) \\ &\iff g \in \mathcal{O}_d^{\mathcal{D}_f}(U). \end{aligned}$$

Damit haben wir bewiesen:

6.9 Satz Für die holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow W$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) f ist fasertreu,
- (2) $\mathcal{O}^{\mathcal{D}_f} = \mathcal{O}_d^{\mathcal{D}_f}$,
- (3) $\mathcal{O}^{\mathcal{D}_f} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}_f}$.

In [R-1] findet man Beispiele für fasertreue Abbildungen.

6.10 Satz Für die holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow W$ sei \mathcal{D}_f reindimensional. Dann ist f fasertreu.

Zum **Beweis** vgl. [R-1, 5.4]. Jede offene holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow W$ erfüllt die Voraussetzungen von 6.10 und ist daher fasertreu (vgl. 5.6 ff).

Die holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow W$ heißt **überall faktorisierend**, wenn gilt: für alle $x \in X$ und alle $g \in (\mathcal{O}_{\mathcal{F}_f})_x$ gibt es ein $h \in (\mathcal{O}_W)_{f(x)}$ mit $g = h \circ f$.

6.11 Satz Die holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow W$ sei überall faktorisierend, Dann ist f fasertreu.

Beweis: Es ist immer $\mathcal{O}^{\mathcal{D}_f} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{F}_f}$. Sei $x_0 \in X$, $g \in (\mathcal{O}_{\mathcal{F}_f})_{x_0}$ und dazu $h \in (\mathcal{O}_W)_{f(x_0)}$ mit $g = h \circ f$. Wir betrachten Repräsentanten $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ und $h: V \rightarrow \mathbb{C}$ der Keime g, h auf zusammenhängenden offenen Umgebungen U bzw. V von x_0 bzw. $f(x_0)$ mit $f(U) \subset V$ und $g = h \circ f$ auf U . Dann gilt offensichtlich $g \in \mathcal{O}^{\mathcal{D}_f}(U)$. \square

Der folgende Satz stammt von MALGRANGE (vgl. 5.21 und 5.22 in [R-1]):

6.12 Satz Für die holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow W$ gelte: W ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $q = \text{Rang } \Omega_f$ und $\text{codim Sing } f \geq 2$. Dann ist f überall faktorisierend, insbesondere fasertreu.

Daß nicht jede holomorphe Abbildung $f: X \rightarrow W$ fasertreu ist, zeigt das folgende Beispiel:

6.13 Beispiel Sei $X = \mathbb{C}_{z,w,u}^3$, $W = \mathbb{C}_{s,t}^2$ und $f: X \rightarrow W$ definiert durch $(z, w, u) \mapsto (z, z \cdot w \cdot u)$. Die Funktionalmatrix Df von f ist

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ w \cdot u & z \cdot u & z \cdot w \end{pmatrix}$$

also ist $\text{Sing } f = (\{0\} \times \mathbb{C}^2) \cup (\mathbb{C} \times \{(0, 0)\})$. Für $(s, t) \in \mathbb{C}^2$ gilt:

$$f^{-1}(s, t) = \begin{cases} \{s\} \times \{(w, u) \in \mathbb{C}^2 : w \cdot u = \frac{t}{s}\} & \text{falls } s \neq 0, \\ \{0\} \times \mathbb{C}^2 & \text{falls } s = 0. \end{cases}$$

Die Funktion $g: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z, w, u) := w \cdot u$, ist auf $\mathbb{C}^3 \setminus (\{0\} \times \mathbb{C}^2)$ eine \mathcal{D}_f -Stammfunktion, nicht aber auf \mathbb{C}^3 .

Gemäß 6.4 induziert eine abbildungsdefinierte quasi-analytische Zerlegung eine abbildungsdefinierte holomorphe Blätterung. Im Fall von fasertreuen lokalen Beschreibungen gilt die Umkehrung.

6.14 Satz Die p -dimensionale holomorphe Blätterung \mathcal{F} sei abbildungsdefiniert mit fasertreuen lokalen Beschreibungen. Dann gilt:

- (1) \mathcal{F} ist eine starke Blätterung.
- (2) $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ ist abbildungsdefiniert mit den fasertreuen lokalen Beschreibungen von \mathcal{F} als lokale Beschreibungen.

Beweis: Sei $U \subset X$ ein Gebiet und $f: U \rightarrow W$ eine fasertreue lokale Beschreibung von \mathcal{F} . Es genügt zu zeigen, daß die Elemente von \mathcal{D}_f starke lokale \mathcal{F} -Blätter sind: daraus folgt dann sofort (1) und (2).

Sei dazu $A \in \mathcal{D}_f$. Wir betrachten einen Punkt $x \in A$. Dann gilt für alle Punkte y einer X -offenen Umgebung $U' \subset U$ von x , daß $\dim_y f^{-1}(f(y)) \leq \dim_x A$ (vgl. [K/K]). Also ist $\dim_x A \geq p$. Sei wieder $x \in A$ und $g \in (\mathcal{O}_{\mathcal{F}})_x$. Dann ist $g|_A$ konstant wegen 6.9. Also ist A eine \mathcal{F} -Integralvarietät mit $\dim A \geq p$.

Nun sei $B \subset U$ eine lokal-analytische Menge und eine \mathcal{F} -Integralvarietät. Sei $x \in A \cap B$. Weil wir uns W als lokal-analytische Teilmenge von \mathbb{C}^N vorstellen dürfen, ist $f|_{B_x}$ konstant, also $B_x \subset A_x$. \square

Die abbildungsdefinierten quasi-analytischen Zerlegungen mit fasertreuen lokalen Beschreibungen entsprechen also genau den abbildungsdefinierten holomorphen Blätterungen mit fasertreuen lokalen Beschreibungen.

6.15 Satz Die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} von X sei reindimensional. Ist \mathcal{D} abbildungsdefiniert, so ist \mathcal{D} abbildungsdefiniert mit fasertreuen lokalen Beschreibungen, wird also insbesondere durch eine starke holomorphe Blätterung induziert.

Zum **Beweis** siehe 6.10.

6.16 Beispiel Die quasi-analytische Zerlegung $\mathcal{D} = \mathcal{D}_f$ aus Beispiel 6.13 kann nicht durch fasertreue lokale Beschreibungen definiert werden.

Nehmen wir an, daß dieses doch möglich sei, so betrachten wir die zugehörige holomorphe Blätterung \mathcal{F} . Weil \mathcal{F} und \mathcal{F}_f auf $X \setminus \text{Sing } f$ übereinstimmen, muß $\mathcal{F} = \mathcal{F}_f$ sein. Es ist $g \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(X)$, aber g ist auf dem Blatt $\{0\} \times \mathbb{C}^2$ von \mathcal{D} nicht konstant; Widerspruch!

6.17 Beispiel Wir fahren fort mit Beispiel 6.13 und betrachten zum Vergleich die folgende Abbildung $f_\bullet: X \rightarrow W$, $(z, w, u) \mapsto (z, w \cdot u)$. Sie hat die Funktionalmatrix

$$Df_\bullet = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & w \end{pmatrix},$$

also ist $\text{Sing } f_\bullet = \mathbb{C} \times \{(0, 0)\}$. Für $(s, t) \in \mathbb{C}^2$ gilt:

$$f_\bullet^{-1}(s, t) = \{s\} \times \{(w, u) \in \mathbb{C}^2 : w \cdot u = t\}.$$

Wir stellen fest:

\mathcal{D}_f besteht aus den Blättern $\{0\} \times \mathbb{C}^2$ und $A_{s,c} := \{s\} \times \{(w, u) \in \mathbb{C}^2 : w \cdot u = c\}$, $s \in \mathbb{C}^*$, $c \in \mathbb{C}$

\mathcal{D}_{f_\bullet} besteht aus den Blättern $A_{s,c}$, $s \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$

Außerdem ist \mathcal{D}_{f_\bullet} reindimensional, also ist f_\bullet fasertreu und $\mathcal{D}_{f_\bullet}|_{X \setminus \text{Sing } f} = \mathcal{D}_f|_{X \setminus \text{Sing } f}$. Deshalb ist $\mathcal{F}_f = \mathcal{F}_{f_\bullet} =: \mathcal{F}$, insbesondere $\mathcal{D}_{\mathcal{F}} = \mathcal{D}_{f_\bullet}$. Es ist $\mathcal{D}_f \neq \mathcal{D}_{f_\bullet}$; $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ kann nicht direkt aus f berechnet werden.

Wir schließen mit einem fundamentalen Ergebnis von MALGRANGE (vgl. Satz von Malgrange in [R-1])

6.18 Satz Die Garbe $\Omega_{\mathcal{F}}$ der p -dimensionalen holomorphen Blätterung \mathcal{F} sei lokal frei und es gelte $\text{codim } \text{Sing } \mathcal{F} \geq 3$. Dann ist \mathcal{F} abbildungsdefiniert mit fasertreuen lokalen Beschreibungen.

7 Kohärente, vollständige und perfekte quasi-analytische Zerlegungen

Weil quasi-analytische Zerlegungen sehr chaotisch sein können, ist es gewiß angebracht, an die Zerlegungen Forderungen zu stellen, die aus komplex-analytischer Sicht sinnvoll sind. Am Ende dieses Paragraphen findet man Beispiele, die unsere Begriffsbildungen motivieren und die Grenzen unserer Ergebnisse zeigen.

7.1 Satz Sei \mathcal{D} eine rein p -dimensionale quasi-analytische Zerlegung von X . Ist $\Theta^{\mathcal{D}}$ eine kohärente Untergarbe von Θ , so sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) $\text{Sing } \mathcal{D} \neq X$,
- (2) $\text{Rang } \Theta^{\mathcal{D}} = p$.

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann ist $\text{Sing } \mathcal{D} = \text{Sing } \Theta^{\mathcal{D}}$.

Zum **Beweis** vgl. [H/K/R], Satz 7.

Wir verallgemeinern die in 7.1 beschriebene Situation:

7.2 Definition Die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} von X heißt **kohärent**, wenn gilt:

- (1) $\Theta^{\mathcal{D}}$ ist kohärent
- (2) $\mathcal{D}|_{X \setminus \text{Sing } \Theta^{\mathcal{D}}}$ ist rein p -dimensional, wobei $p = \text{Rang } \Theta^{\mathcal{D}}$ sei.

Dann sei p der **Rang** von \mathcal{D} ; wir schreiben $\text{Rang } \mathcal{D} = p$.

7.3 Satz Die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} sei kohärent. Dann ist $\text{Sing } \mathcal{D} = \text{Sing } \Theta^{\mathcal{D}}$.

Beweis: Wegen 6.7 ist $\mathcal{D}|_{X \setminus \text{Sing } \Theta^{\mathcal{D}}}$ regulär, also gilt $\text{Sing } \mathcal{D} \subset \text{Sing } \Theta^{\mathcal{D}}$. Sei $x \in X \setminus \text{Sing } \mathcal{D}$. Dann ist \mathcal{D} in einer X -Umgebung von x reindimensional, also rein p -dimensional, $p = \text{Rang } \Theta^{\mathcal{D}}$. Also muß $x \in X \setminus \text{Sing } \Theta^{\mathcal{D}}$ und damit $\text{Sing } \Theta^{\mathcal{D}} \subset \text{Sing } \mathcal{D}$ gelten. \square

Insbesondere gilt:

7.4 Ist \mathcal{D} eine kohärente quasi-analytische Zerlegung vom Rang p , so ist $\text{Sing } \mathcal{D}$ eine niederdimensionale analytische Teilmenge von X und $\mathcal{D}|_{X \setminus \text{Sing } \mathcal{D}}$ eine reguläre p -dimensionale quasi-analytische Zerlegung von $X \setminus \text{Sing } \mathcal{D}$.

7.5 Definition Sei \mathcal{D} eine kohärente quasi-analytische Zerlegung vom Rang p . Die durch die Komplettierung $\widetilde{\Theta^{\mathcal{D}}}$ von $\Theta^{\mathcal{D}}$ definierte p -dimensionale holomorphe Blätterung $\mathcal{F}^{\mathcal{D}}$ auf X heiße die **durch \mathcal{D} definierte Blätterung**.

In der Situation von 7.5 ist $\mathcal{D}|_{X \setminus \text{Sing } \mathcal{D}}$ die zur regulären Blätterung $\mathcal{F}_{\mathcal{D}}|_{X \setminus \text{Sing } \mathcal{D}}$ gehörige Zerlegung.

7.6 Sei \mathcal{D} eine kohärente quasi-analytische Zerlegung. Dann gilt $\Theta^{\mathcal{D}} \subset \Theta_{\mathcal{F}^{\mathcal{D}}}$.

Beweis: Es ist $\Theta_{\mathcal{F}^{\mathcal{D}}} = \widetilde{\Theta^{\mathcal{D}}}$.

7.7 Definition und Bemerkung Die kohärente quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} von X heißt **vollständig**, wenn $\Theta^{\mathcal{D}}$ vollständig ist, d.h. $\Theta^{\mathcal{D}} = \Theta_{\mathcal{F}^{\mathcal{D}}}$. In diesem Fall ist

- (1) $\text{Sing } \mathcal{D} = \text{Sing } \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$,
- (2) $\text{codim } \text{Sing } \mathcal{D} \geq 2$.

Wegen (2) vgl. (1).

7.8 Satz Sei \mathcal{D} eine kohärente quasi-analytische Zerlegung von X , $\mathcal{F} := \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) \mathcal{D} ist vollständig.
- (2) $(X, \mathcal{D}'_{\mathcal{F}})$ ist eine quasi-analytische Teilmenge von (X, \mathcal{D}) .

(2) bedeutet, daß $\mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$ auf jedem $B \in \mathcal{D}$ eine quasi-analytische Zerlegung definiert.

Beweis: (2) \implies (1): Es ist $\Theta^{\mathcal{D}} \subset \Theta_{\mathcal{F}}$. Sei $U \Subset X$ ein Gebiet und $\vartheta \in \Theta_{\mathcal{F}}(U)$. Wir betrachten ein Blatt B von $\mathcal{D}|_U$. Sei $x \in B$ und A das Blatt von $\mathcal{D}'_{\mathcal{F}}|_U$ mit $x \in A$. Wegen (2) ist A eine quasi-analytische Teilmenge von B . Dann folgt $\vartheta|_x \in T(A, x) \subset T(B, x)$. Also ist $\vartheta \in \Theta^{\mathcal{D}}(U)$ und $\Theta_{\mathcal{F}} \subset \Theta^{\mathcal{D}}$.

(1) \implies (2): Sei $x_0 \in X$ und $x_0 \in A \cap B$, $A \in \mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$, $B \in \mathcal{D}$. Wir gehen von der im Beweis von 5.9 für $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'_{\mathcal{F}}$ dargestellten Situation aus. Dabei dürfen wir annehmen, daß ein \mathcal{D} -Plättchen B_0 von B existiert mit

- $x_0 \in B_0$,
- B_0 ist eine analytische Teilmenge von X_0 .

Sei $\zeta \in A_0 \subset \mathbb{C}_z^p$, $\zeta \neq 0$ und $\vartheta := \sum_{\nu=1}^p \zeta_{\nu} \vartheta^{(\nu)}$. Dann gilt:

- $\vartheta \in \Theta_{\mathcal{F}}(X_0) = \Theta^{\mathcal{D}}(X_0)$,
- $\gamma: [0, 1] \longrightarrow A_0$, $\gamma(t) := \zeta t$, ist eine Integralkurve zu ϑ mit $\gamma(0) = 0 = x_0$, $\gamma(1) = \zeta$.

Weil $\vartheta|_{B_0}$, folgt $\text{Im } \gamma \subset B_0$, $\zeta = \gamma(1) \in B_0$. Also ist $A_0 \subset B_0$. □

7.9 Definition Die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} von X heißt **fast-regulär**, wenn \mathcal{D} kohärent ist und keine (bzgl. der \mathcal{D} -Struktur) irreduzible Komponente eines Blattes in $\text{Sing } \mathcal{D}$ enthalten ist.

7.10 Satz Jede fast-reguläre quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} von X ist reindimensional und vollständig.

Beweis: Die Aussage über die Reindimensionalität ist klar. Sei $U \Subset X$, $\vartheta \in \Theta_{\mathcal{F}^{\mathcal{D}}}(U)$, $A \in \mathcal{D}$, $A \cap U \neq \emptyset$. Dann ist ϑ auf $U \setminus \text{Sing } \mathcal{D}$ parallel zu A . Wegen 2.15 gilt dies auf ganz U . □

7.11 Satz Für die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} von X gelte:

- (1) $\text{Sing } \mathcal{D}$ ist eine analytische Teilmenge von X mit $\text{codim } \text{Sing } \mathcal{D} \geq 2$.
- (2) Keine (bezgl. der \mathcal{D} -Struktur) irreduzible Komponente eines Blattes ist in $\text{Sing } \mathcal{D}$ enthalten.

Dann ist \mathcal{D} fast-regulär, insbesondere vollständig.

Beweis: Sei $S := \text{Sing } \mathcal{D}$. $\Theta^{\mathcal{D}}|_{X \setminus S}$ ist eine reguläre Untergarbe von $\Theta|_{X \setminus S}$. Aufgrund eines Satzes von SIU-TRAUTMANN (vgl. [R-1, Prop. 1.21]) gibt es eine kohärente Untergarbe Θ' von Θ mit $\Theta'|_{X \setminus S} = \Theta^{\mathcal{D}}|_{X \setminus S}$. Weil $\Theta^{\mathcal{D}}|_{X \setminus S}$ regulär ist, dürfen wir Θ' sofort als vollständig voraussetzen. Dann ist $\Theta^{\mathcal{D}} \subset \Theta'$. Mit der Argumentation im Beweis von 7.10 folgt $\Theta^{\mathcal{D}} = \Theta'$. \square

Aus 7.11 folgt:

7.12 Korollar Die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} von X sei rein 1-codimensional und $\text{Sing } \mathcal{D}$ sei eine analytische Teilmenge von X der Codimension ≥ 2 . Dann ist \mathcal{D} fast-regulär, insbesondere vollständig.

7.13 Satz Sei \mathcal{F} eine starke holomorphe Blätterung. Dann gilt:

- (1) $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ ist vollständig,
- (2) $\mathcal{F}^{\mathcal{D}} = \mathcal{F}$.

Beweis ad (1): Wegen 5.16 ist $(X, \mathcal{D}_{\mathcal{F}})$ eine quasi-analytische Teilmenge von $(X, \mathcal{D}_{\mathcal{F}})$. Weil $\Theta_{\mathcal{F}}$ vollständig ist, folgt: $\Theta^{\mathcal{D}} \subset \Theta_{\mathcal{F}}$. Mit dem Schluß (2) \implies (1) im Beweis von 7.8 folgt: $\Theta^{\mathcal{D}} = \Theta_{\mathcal{F}}$. (2) ist wegen (1) klar. \square

Ist \mathcal{F} eine starke holomorphe Blätterung, so ist $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ insbesondere kohärent. Wir wissen nicht, ob dies für beliebige holomorphe Blätterungen mit Blättern überall gilt.

7.14 Sei \mathcal{F} eine holomorphe Blätterung mit Blättern überall und $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ sei kohärent. Dann gilt $\mathcal{F}^{\mathcal{D}} = \mathcal{F}$.

Beweis: Es gilt mit bekannten Argumenten $\widetilde{\Theta^{\mathcal{D}}} = \Theta_{\mathcal{F}}$.

7.15 Definition Die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} von X heißt **perfekt**, wenn gilt:

- (1) \mathcal{D} ist kohärent.
- (2) Es gibt eine holomorphe Blätterung \mathcal{F} mit Blättern überall derart, daß $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ ist.

Die perfekten quasi-analytischen Zerlegungen sind also genau die kohärenten Blätterräume der Blätterungen mit Blättern überall.

Aus 7.14 folgt:

7.16 Die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} sei perfekt und sei \mathcal{F} wie in 7.15. Dann ist $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$. Insbesondere ist \mathcal{F} eindeutig bestimmt.

Eine alternative Definition der Perfektheit lautet:

7.17 Die kohärente quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} ist genau dann perfekt, wenn gilt: $\mathcal{F} := \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$ hat Blätter überall, $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ ist kohärent und $\mathcal{D}_{\mathcal{F}} = \mathcal{D}$.

Aus 6.4, 6.14 und 7.13 folgt:

7.18 Satz Die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} sei abbildungsdefiniert mit faserstreuen lokalen Beschreibungen. Dann ist \mathcal{D} vollständig und perfekt.

7.19 Satz Für die kohärente quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} gelte:

- (1) \mathcal{D} ist rein p -dimensional und $\dim \operatorname{Sing} \mathcal{D} < p$,
- (2) \mathcal{D} ist lokal eigentlich.

Dann ist \mathcal{D} vollständig und perfekt.

Beweis: Wegen (1) ist \mathcal{D} fast-regulär und wegen 7.10 dann vollständig. Wegen 7.7 ist $\operatorname{Sing} \mathcal{D} = \operatorname{Sing} \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$. Sei $\mathcal{F} := \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$, $S := \operatorname{Sing} \mathcal{F}$. Wir dürfen annehmen, daß \mathcal{D} eine analytische Zerlegung von X ist. Auf $X^* := X \setminus S$ stimmt \mathcal{D} mit dem Blätterraum $\mathcal{D}_{\mathcal{F}^*}$ der regulären Blätterung $\mathcal{F}^* := \mathcal{F}|_{X^*}$ überein. Ist A' eine irreduzible Komponente eines Blattes A von \mathcal{D} , so ist $A' \setminus S$ ein Blatt von \mathcal{F}^* . Ist umgekehrt A^* ein Blatt von \mathcal{F}^* , so ist die X -abgeschlossenen Hülle A' von A^* eine irreduzible Komponente eines Blattes A von \mathcal{D} .

Sei A ein Blatt von \mathcal{D} . Dann ist A eine Integralvarietät von \mathcal{F} und $\dim A \geq p$. Sei $B \subset X$ eine irreduzible lokal-analytische Menge, Integralvarietät von \mathcal{F} , $\dim B \geq p$ und $x \in A \cap B$. Wir wollen zeigen: $B_x \subset A_x$. Indem wir uns eventuell auf eine Umgebung von x zurückziehen, dürfen wir annehmen, daß B eine analytische Teilmenge von X ist. Dann ist $B \setminus S$ ein Blatt von \mathcal{F}^* , also ist B eine irreduzible Komponente eines Blattes von \mathcal{D} . Es folgt: $B \subset A$. Also ist $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ perfekt. \square

7.19 kann auch folgendermaßen formuliert werden:

7.19' Satz Für die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} gelte:

- (1) $\operatorname{Sing} \mathcal{D}$ ist eine analytische Teilmenge von X , \mathcal{D} ist rein p -dimensional und $\dim \operatorname{Sing} \mathcal{D} < p$,
- (2) \mathcal{D} ist lokal eigentlich.

Dann ist \mathcal{D} vollständig und perfekt.

Beweis: Wir dürfen $p \leq n - 1$ und dann $\operatorname{codim} \operatorname{Sing} \mathcal{D} \geq 2$ voraussetzen. Wegen 7.11 ist \mathcal{D} dann insbesondere kohärent, so daß die Voraussetzungen von 7.19 erfüllt sind.

Für die Dimension $p = n - 1$ gibt es eine über 7.19 bzw. 7.19' hinausgehende Aussage:

7.20 Satz Für die kohärente quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} gelte:

- (1) \mathcal{D} ist rein 1-codimensional,
- (2) \mathcal{D} ist lokal eigentlich.

Dann ist \mathcal{D} vollständig und perfekt.

Beweis: Wir werden zeigen, daß in diesem Fall automatisch $\operatorname{codim} \operatorname{Sing} \mathcal{D} \geq 2$ ist; dann folgt 7.20 aus 7.19.

Wir dürfen voraussetzen, daß \mathcal{D} analytisch ist. Sei $\mathcal{F} := \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$, $S := \operatorname{Sing} \mathcal{D}$, $X^* := X \setminus S$ und $S' := \operatorname{Sing} \mathcal{F}$. Es ist $\operatorname{codim} S' \geq 2$.

Wir gehen indirekt vor und nehmen an, daß ein $x_0 \in S$ mit $\dim_{x_0} S = n - 1$ existiert. Weil $\operatorname{codim} S' \geq 2$ und $\operatorname{codim} \operatorname{Sing} S \geq 2$ ist, dürfen wir annehmen, daß $x_0 \in S \setminus (S' \cup \operatorname{Sing} S)$ ist. Deshalb können wir von der folgenden Situation ausgehen:

- X ist ein Gebiet im \mathbb{C}^n von der Form $X = D_1 \times D_2$, wobei D_1 ein Gebiet im \mathbb{C}_z^{n-1} und D_2 ein Gebiet in \mathbb{C}_w ist, es ist $x_0 = 0$.
- \mathcal{F} ist eine reguläre Blätterung mit dem Blätterraum $\mathcal{D}^* = \{D_1 \times \{w\} : w \in D_2\}$
- S ist eine zusammenhängende 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit von X .

Wir produzieren den gewünschten Widerspruch, indem wir zeigen: $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$. Dazu unterscheiden wir zwei alternative Fälle:

1. Fall: Die Blätter von \mathcal{D}^* schneiden S alle niederdimensional.

Weil $\mathcal{D}^*|_{X^*} = \mathcal{D}|_{X^*}$ ist, muß dann $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$ sein.

2. Fall: Es gibt ein Blatt von \mathcal{D}^* , welches S volldimensional schneidet.

Dann muß dieses Blatt gleich S sein, d.h. es ist $S = D_2 \times \{c_0\}$ für ein $c_0 \in \mathbb{C}_w$. Weil $0 \in S$ gilt, ist dann $c_0 = 0$. Sei A das Blatt von \mathcal{D} mit $0 \in A$. Weil A nicht in X^* eindringen kann, muß $A = S$ sein. Also ist auch in diesem Fall $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$. \square

7.21 Satz Die quasi-analytische Zerlegung \mathcal{D} sei rein 1-codimensional und lokal eigentlich. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) \mathcal{D} ist kohärent.
- (2) \mathcal{D} ist vollständig.
- (3) \mathcal{D} ist perfekt.
- (4) \mathcal{D} ist abbildungsdefiniert.

Wegen 6.10 ist \mathcal{D} dann abbildungsdefiniert mit faserstreuen lokalen Beschreibungen.

Beweis: Trivialerweise gilt (2) \implies (1) und (3) \implies (1); wegen 7.20 gilt (1) \implies (2), (1) \implies (3). Also sind (1), (2) und (3) äquivalent.

Wegen 7.18 gilt (4) \implies (3). Es bleibt (3) \implies (4) zu zeigen. Sei dazu $\mathcal{F} := \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$. Wegen (2) ist $S := \text{Sing } \mathcal{D} = \text{Sing } \mathcal{F}$. Dann sind die Voraussetzungen des Satzes von MATTEI-MOUSSU (vgl. 3.29 in [R-1]) für \mathcal{F} erfüllt. Deshalb ist \mathcal{F} abbildungsdefiniert mit holomorphen Funktionen (die sind stets offene Abbildungen) als lokalen Beschreibungen. Insbesondere ist \mathcal{F} eine starke Blätterung.

Sei $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ eine lokale Beschreibung von \mathcal{F} . Dann ist $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{\mathcal{F}}|_U$ (vgl. 6.14). Wir dürfen $\mathcal{D}|_U$ als analytisch voraussetzen. Auf $U \setminus S$ ist $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\mathcal{F}}$. Weil $\text{codim } S \geq 2$ ist, muß f auf den Blättern von $\mathcal{D}|_U$ konstant sein. Dann ist aber $\mathcal{D}|_U = \mathcal{D}_f$. \square

Für perfekte quasi-analytische Zerlegungen gilt ein Identitätssatz:

7.22 Satz Seien $\mathcal{D}, \mathcal{D}_{\bullet}$ perfekte quasi-analytische Zerlegungen von X . Gibt es ein nichtleeres Gebiet $U \subseteq X$ mit $\mathcal{D}|_U = \mathcal{D}_{\bullet}|_U$, so ist $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\bullet}$.

Klar! Es ist $\mathcal{F}^{\mathcal{D}} = \mathcal{F}^{\mathcal{D}_{\bullet}}$.

Es folgen einige Beispiele:

7.23 Beispiel (vgl. [H/K/R, Beispiel 15]) Es seien Y und Z komplexe zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Topologie von der gleichen Dimension m , es sei $X := Y \times Z$. Ferner sei $U \subseteq Y$ nicht leer, offen und zusammenhängend, es sei $A := Y \setminus U$. Dann wird durch

$$\mathcal{D}(y, z) := \begin{cases} U \times \{z\} & \text{wenn } y \in U, \\ \{y\} \times Z & \text{wenn } y \notin U \end{cases} \quad \text{für } (y, z) \in X$$

eine rein m -dimensionale lokal-analytische Zerlegung \mathcal{D} auf X definiert. Es ist $\text{Sing } \mathcal{D} = \partial U \times Z$; die Garbe $\Theta^{\mathcal{D}}$ ist genau dann kohärent, wenn A analytisch in Y ist (dann ist $A = \partial U$): wenn $\Theta^{\mathcal{D}}$ kohärent ist, dann ist $\text{Sing } \mathcal{D} = \partial U \times Z$ sowie auch $A = \partial U$ analytisch; wenn umgekehrt A analytisch ist, dann ist mit der Idealgarbe von A auch $\Theta^{\mathcal{D}}$ kohärent.

Wenn $\Theta^{\mathcal{D}}$ kohärent und $A \neq \emptyset$ ist, dann ist $\Theta^{\mathcal{D}}$ sicher nicht vollständig, denn die Kompletterung $\mathcal{F} := \widetilde{\Theta^{\mathcal{D}}}$ ist diejenige reguläre holomorphe Blätterung von X , deren Blätter genau die $Y \times \{z\}$, $z \in Z$, sind (vgl. Identitätssatz für singuläre Blätterungen). Folglich ist $\Theta^{\mathcal{D}}$ genau dann vollständig, wenn $A = \emptyset$ ist. Wenn A innere Punkte hat, ist $\Theta^{\mathcal{D}}$ nicht kohärent. Ist $A \neq \emptyset$, so ist \mathcal{D} nicht eigentlich.

Ist z.B. $Y = Z = \mathbb{C}$ und $U = \mathbb{C}^*$, dann ist \mathcal{D} rein 1-codimensional, $\Theta^{\mathcal{D}}$ wird erzeugt vom Vektorfeld $y \frac{\partial}{\partial y}$, ist also kohärent, aber nicht vollständig: $\widetilde{\Theta^{\mathcal{D}}}$ wird erzeugt von $\frac{\partial}{\partial y}$; es ist $\dim \text{Sing } \mathcal{D} = 1 = \dim \mathcal{D}$.

7.24 Beispiel (vgl. [H/K/R, Beispiel 17]) Es sei $X := \mathbb{C}^3$, dann wird durch

$$\mathcal{D}(z) := \begin{cases} \mathbb{C} \times \{z_2\} \times \{z_3\} & \text{wenn } z_3 \text{ rationalen Real- und Imaginärteil hat} \\ \{z_1\} \times \mathbb{C} \times \{z_3\} & \text{sonst} \end{cases}$$

eine rein 1-dimensionale analytische Zerlegung von X definiert; die Garbe $\Theta^{\mathcal{D}} = 0 \subset \Theta$ definiert eine reguläre Blätterung mit dem einzigen Blatt X , es ist $X = \text{Sing } \mathcal{D} \neq \text{Sing } \Theta^{\mathcal{D}} = \emptyset$. \mathcal{D} ist eigentlich.

7.25 Beispiel (vgl. [H/K/R, Beispiel 16])

Für die durch

$$\mathcal{D}(y, z) := \begin{cases} \{(z_1, z_2)\} \times \mathbb{C} & \text{wenn } z_1 \in \mathbb{C}^*, \\ \{0\} \times \mathbb{C} \times \{z_3\} & \text{wenn } z_1 = 0 \end{cases}$$

auf \mathbb{C}^3 definierte rein 1-dimensionale analytische Zerlegung wird $\Theta^{\mathcal{D}}$ erzeugt vom globalen Vektorfeld $z_1 \frac{\partial}{\partial z_3}$, ist also kohärent; die zugehörige Blätterung \mathcal{F} wird erzeugt vom globalen Vektorfeld $\frac{\partial}{\partial z_3}$; die Blätter von \mathcal{F} sind also genau die Mengen $\{(z_1, z_2)\} \times \mathbb{C}$, wobei $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Es ist

$$\text{Sing } \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^3 : z_1 = 0\} = \text{Sing } \Theta^{\mathcal{D}}, \quad \text{Sing } \mathcal{F} = \emptyset.$$

\mathcal{D} ist eigentlich.

7.26 Beispiel Sei $X = \mathbb{C}_{z,w}^2$ und \mathcal{D} bestehe aus den Mengen

$$A = \{0\} \times \mathbb{C}_w, \quad A_a = \{(z, w) : w = az, z \neq 0\}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

\mathcal{D} ist eine rein 1-codimensionale lokal-analytische Zerlegung von X . $\Theta^{\mathcal{D}}$ wird erzeugt von $\vartheta := z \frac{\partial}{\partial z} + w \frac{\partial}{\partial w}$, folglich ist $\Theta^{\mathcal{D}}$ kohärent. Weil $\text{Sing } \mathcal{D} = \{0\}$ 2-codimensional ist, ist $\Theta^{\mathcal{D}}$ vollständig. Die Blätterung $\mathcal{F} := \mathcal{F}^{\mathcal{D}}$ besitzt kein durch 0 verlaufendes Blatt. \mathcal{D} ist nicht lokal eigentlich.

8 Anhang

8.1 Definition Ein topologischer Raum X heißt (**abgeschlossen**) **zerlegbar**, wenn X eine Darstellung

$$X = \bigcup_{\nu \in N} A_{\nu} \tag{*}$$

besitzt, wobei N eine Teilmenge von \mathbb{N} mit $\text{Anz } N \geq 2$ ist und die A_{ν} nichtleere paarweise disjunkte abgeschlossene Teilmengen von X sind. Das System $\{A_{\nu} : \nu \in N\}$ heißt dann eine (**abgeschlossene**) **Zerlegung** von X . Wenn man die Menge N endlich wählen kann, dann heißt X **endlich (abgeschlossen) zerlegbar**.

Wenn X hausdorffsch ist, dann nennen wir X **kompakt zerlegbar** bzw. **endlich kompakt zerlegbar**, wenn alle A_{ν} kompakt gewählt werden können. In dem Fall nennen wir die zugehörige Zerlegung eine **kompakte Zerlegung**.

- Ein topologischer Raum ist genau dann endlich zerlegbar, wenn er nicht zusammenhängend ist.
- Ein kompakter Raum ist genau dann kompakt zerlegbar, wenn er zerlegbar ist.

Uns ist nicht bekannt, ob ein beliebiger zusammenhängender Raum nicht zerlegbar ist.

Allerdings können wir zeigen:

8.2 Satz Ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist nicht zerlegbar.

Beweis: Wir überlegen uns zunächst, daß es genügt, den Spezialfall $X = [0, 1]$ zu behandeln: angenommen, es gibt eine Zerlegung $\{A_\nu : \nu \in N\}$ von X . Wähle $\nu \neq \mu$ aus N , $a \in A_\nu$, $b \in A_\mu$ und einen Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ von a nach b . Dann kann man aus den kompakten Mengen $\gamma^{-1}(A_\lambda) \subset [0, 1]$, $\lambda \in N$, eine kompakte Zerlegung von $[0, 1]$ konstruieren.

Angenommen, es gibt eine kompakte Zerlegung $\{A_\nu : \nu \in \mathbb{N}\}$ von $[0, 1]$. Wir dürfen annehmen, dass $0 \in A_0$ und $1 \in A_1$. Es sei $a := \max A_0$ und $b := \min(A_1 \cap]a, 1])$. Man überlegt sich, daß man $a < b$ annehmen darf. Dann ist $I :=]a, b[$ ein offenes Intervall und $\{A_\nu \cap I : \nu \geq 2\}$ eine kompakte Zerlegung von I . Wegen Lemma 8.3 dürfen wir annehmen, daß alle $K_\nu := A_\nu$ kompakte Intervalle in I sind (dabei sind entartete Intervalle, die nur aus einem Punkt bestehen, zugelassen). Es sei M_ν das Innere von K_ν ; dann ist M_ν genau dann leer, wenn K_ν nur aus einem Punkt besteht. Die Menge $M := \bigcup_{\nu \geq 2} M_\nu$ ist offen, also ist $D := [a, b] \setminus M$ kompakt. Da ∂K_ν , $\nu \geq 2$, jeweils aus höchstens zwei Punkten besteht, ist D abzählbar. Es ist $\text{dist}(K_\nu, K_\mu) > 0$ für $\nu \neq \mu$, $\nu, \mu \geq 2$. Daraus folgert man: D ist perfekt, d.h. jeder Punkt von D ist Häufungspunkt von D , und D ist total unzusammenhängend. Deshalb ist D homöomorph zur Cantormenge (vgl. Abschnitt 30 in [Wil]), insbesondere überabzählbar. Widerspruch! \square

8.3 Lemma *Es sei $(A_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter kompakter Teilmengen eines offenen Intervalls $I \subset \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Folge $(L_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ paarweise disjunkter (möglicherweise leerer) kompakter Teilmengen von I derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

- (1) L_n ist endliche Vereinigung von paarweise disjunkten kompakten Intervallen.
- (2) $\bigcup_{\nu \leq n} A_\nu =: \mathbf{A}_n \subset \mathbf{L}_n := \bigcup_{\nu \leq n} L_\nu$
- (3) $\partial \mathbf{L}_n \subset \mathbf{A}_n$

Beweis durch Induktion über n : Setze $L_0 := [\min A_0, \max A_0]$. Wenn L_0, \dots, L_n mit den obigen Eigenschaften schon definiert sind, dann konstruieren wir L_{n+1} folgendermassen: die offene Menge $I \setminus \mathbf{L}_n$ ist endliche Vereinigung von paarweise disjunkten offenen Intervallen $J_\nu^{(n)}$, $1 \leq \nu \leq j_n$. Die Mengen $A_\nu^{(n+1)} := A_{n+1} \cap J_\nu^{(n)}$, $1 \leq \nu \leq j_n$, sind kompakt wegen (3), und

$$L_{n+1} := \bigcup_{1 \leq \nu \leq j_n, A_\nu^{(n+1)} \neq \emptyset} [\min A_\nu^{(n+1)}, \max A_\nu^{(n+1)}]$$

ist endliche Vereinigung paarweise disjunkter kompakter Intervalle. Da $A_{n+1} \subset \mathbf{L}_n \cup L_{n+1} = \mathbf{L}_{n+1}$, folgt $\mathbf{A}_{n+1} \subset \mathbf{L}_{n+1}$. Nach Konstruktion ist $\partial L_{n+1} \subset A_{n+1}$, also auch $\partial \mathbf{L}_{n+1} \subset \mathbf{A}_{n+1}$. \square

Bei den nun folgenden Überlegungen sei $a \in \mathbb{R}$ irrational und

$$\mathbf{A} := \{ak + l : k, l \in \mathbb{Z}\}.$$

Es gilt:

8.4 Satz A *ist dicht in \mathbb{R} .*

Der **Beweis** ist eine einfache Aufgabe für einen Anfängerkurs in Analysis.

Der Torus $T := \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ (mit $(x + iy) \sim (x' + iy') \iff (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$) ist in natürlicher Weise eine kompakte Riemannsche Fläche, die kanonische Projektion $\pi: \mathbb{C} \rightarrow T$ ist lokal biholomorph. Wir betrachten die Gerade $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow T$, $\gamma(t) := t + iat$. Bei der folgenden reellen Betrachtung sehen wir \mathbb{C} als \mathbb{R}^2 an.

8.5 Satz *Es sei $\xi \in T$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\pi(x, y) = \xi$ und $|ax - y| < \varepsilon$.*

Beweis: Es sei $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ mit $\pi(u, v) = \xi$. Wegen 8.4 gibt es $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $|(au - v) - (ak + l)| < \varepsilon$. Dann haben $x := u - k$ und $y := v + l$ die geforderten Eigenschaften.

8.6 Satz Die Menge $\pi(\{t + iat : t \in \mathbb{R}\})$ ist dicht in T .

Beweis: Zu gegebenem $\xi \in T$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$ gibt es wegen 8.5 Zahlen t_n und $y_n \in \mathbb{R}$ derart, dass $\xi = \pi(t_n, y_n)$ und $|at_n - y_n| < 1/n$ für alle n . Dann ist $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(t_n + iat_n)$. \square

Der Beweis der folgenden Aussage ist eine Übungsaufgabe für einen Kurs in Funktionentheorie:

8.7 Satz Die Funktionen $\sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind surjektiv.

Literatur

- [B] BAUM, P.: Structure of Foliation Singularities. *Advances in Math.* **15** (1975), 361-374.
- [B/B] BAUM, P. & BOTT, R.: Singularities of Holomorphic Foliations. *Journ. Diff. Geom.* **7** (1972), 279-342.
- [Bou] BOURBAKI, N.: General Topology, Part 1. Addison-Wesley, Reading (1966)
- [H] HOLMANN, H.: Holomorphe Blätterungen komplexer Räume. *Comm. Helv.* **47** (1972), 185-204.
- [H/K/R] HOLMANN, H., KAUP, B., REIFFEN, H-J.: Holomorphe Blätterungen und schwach-analytische Zerlegungen. *Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie*, Festschrift für N. Knoche, Verlag Franzbecker (2003), 84-92.
- [K/K] KAUP, L. & KAUP, B.: Holomorphic Functions of Several Variables. *De Gruyter Studies in Mathematics* vol. 3 (1983).
- [N] NARASIMHAN, R.: Analysis on real and complex Manifolds. *Advanced Studies in Pure Mathematics* vol 1 (1968).
- [R-1] REIFFEN, H-J.: Leafspaces and Integrability. In: *Holomorphic Dynamics*, Proc. Mexico 1986. *Lect. Notes in Math.* 1345, Springer (1988), 271-293.
- [R-2] REIFFEN, H-J.: Rings of Primitives and Factorizing Integrals for Singular Holomorphic Foliations. Universität Freiburg (Schweiz), Math. Inst. (1997), Rep. Nr. 1/97, www.unifr.ch/math/reports.html
- [ReTr] Reiffen, H-J. & Trapp, H.W.: Einführung in die Analysis. Universitätsverlag Rasch Osnabrück (1999).
- [Spa] SPALLEK, K.H.: Fortsetzung von Blätterungen und Integration beliebiger Verteilungen. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, tome XXXVI, Nos 5-16 (1991), 271-286.
- [Wil] WILLARD, S.T.: General Topology. Addison-Wesley, Reading (1970).

`burchard.kaup@unifr.ch`

Département de mathématiques, Université de Fribourg, CH-1700 Fribourg, Switzerland

`reiffen@mathematik.uni-osnabrueck.de`

Fachbereich Mathematik/Informatik, Universität Osnabrück, D-49069 Osnabrück, Germany